



середа, 15. липня 2026

Задача 1. На дошці написано 2026, не обов'язково різних, натуральних чисел більших за 1. Кожним кроком Заріна обирає два натуральних числа $m > 1$ та $n > 1$ з різних місць дошки та змінює ці два натуральних числа на такі два натуральних числа:

$$\text{НСД}(m, n) \quad \text{та} \quad \frac{\text{НСК}(m, n)}{\text{НСД}(m, n)}.$$

Вона продовжує робити такі кроки допоки це можливо.

(а) Доведіть, що незалежно від виборів Заріни, після скінченної кількості кроків, рівно одне натуральне число M на дошці буде більшим за 1.

(б) Доведіть, що значення числа M не залежить від виборів Заріни.

(Зауважимо, що $\text{НСД}(x, y)$ позначає найбільший спільний дільник натуральних чисел x та y , а $\text{НСК}(x, y)$ позначає найменше спільне кратне натуральних чисел x та y .)

Задача 2. Дано трикутник ABC і точки M та N є серединами сторін AB та AC відповідно. Точки K та L обрано строго всередині трикутників BMC та BNC відповідно так, що точка K лежить строго всередині трикутника ABL , а точка L лежить строго всередині трикутника AKC . Припустимо, що справджуються такі умови:

$$\angle KBA = \angle ACL, \quad \angle LBK = \angle LNC, \quad \text{та} \quad \angle LCK = \angle BMK.$$

Нехай точка O – центр описаного кола трикутника AKL . Доведіть, що $OM = ON$.

Задача 3. Нехай n – натуральне число. Марина та Катя мають паличку довжини 1 та хочуть поділити її між собою. Марина позначає не більше ніж n точок на паличці, а потім Катя позначає не більше ніж n точок на паличці. Усі відмічені точки попарно різні. Потім паличку розрізають по усіх відмічених точках, утворюючи деяку кількість частин. Після цього вони по черзі забирають собі необрану частину палички, причому Марина починає першою. Мета кожної з гравчинь максимізувати загальну суму довжин забраних собі частинок.

Для кожного n визначте найбільше значення c таке, що Марина може гарантувати загальну суму довжин забраних собі частинок принаймні c , незалежно від дій Каті.



четвер, 16. липня 2026

Задача 4. Катя та Марина грають в гру. Нехай для кута θ , відомого обом гравцям, справджується умова $0^\circ < \theta < 180^\circ$. Спочатку Катя робить паперовий трикутник $\mathcal{T}$ з кутами на свій вибір. Після цього вони повторювано роблять наступні кроки:

- Якщо трикутник $\mathcal{T}$ має принаймні один кут розміром рівно θ , тоді гра закінчується та Марина виграє.
- Інакше, Марина вибирає точку P на одній з сторін трикутника $\mathcal{T}$, відмінну від його вершин. Потім вона робить прямолінійний розріз з точки P до протилежної вершини трикутника $\mathcal{T}$, розрізаючи його на два трикутники.
- Катя викидає один з двох трикутників. Трикутник, що залишився, стає новим трикутником $\mathcal{T}$.

Для яких дійсних значень θ Марина може гарантувати свою перемогу за скінченну кількість ходів, незалежно від дій Каті?

Задача 5. Нехай $\mathbb{R}_{>0}$ позначає множину додатних дійсних чисел. Знайдіть усі такі функції $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, що для довільних $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ справджуються умови:

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)}.$$

Задача 6. Нехай $a_1, a_2, a_3, \dots$ – нескінченна послідовність натуральних чисел більших за 1. Припустимо, що для усіх натуральних чисел n число a_{n+1} – найменше натуральне число, більше за число a_n , таке, що $\text{НСД}(a_{n+1}, a_i) > 1$ для усіх $i = 1, 2, \dots, n$. Доведіть, що існують такі натуральні числа T та L , що для кожного натурального числа n справджується така умова:

$$a_{n+T} = a_n + L.$$

(Зауважимо, що $\text{НСД}(x, y)$ позначає найбільший спільний дільник натуральних чисел x та y .)