



พุธ, 15 กรกฎาคม 2026

โจทย์ข้อ 1. มีจำนวนเต็ม 2026 จำนวนที่มากกว่า 1 เขียนอยู่บนกระดานดำ โดยที่จำนวนเต็มแต่ละจำนวน ไม่จำเป็นต้องแตกต่างกัน ในการเล่นแต่ละครั้ง ขงจื้อเลือกสองจำนวนเต็ม $m > 1$ และ $n > 1$ จากสองตำแหน่ง ที่แตกต่างกันบนกระดาน และแทนที่สองจำนวนนั้นด้วย

$$\gcd(m, n) \quad \text{และ} \quad \frac{\text{lcm}(m, n)}{\gcd(m, n)}$$

ขงจื้อเล่นแบบนี้ไปเรื่อย ๆ ตราบใดที่เขายังสามารถเล่นได้

(a) จงพิสูจน์ว่า ไม่ว่าขงจื้อจะเลือกอย่างไร หลังจากการเล่นเป็นจำนวนจำกัดครั้ง บนกระดานจะมี จำนวนเต็ม M เพียงจำนวนเดียวที่มีค่ามากกว่า 1

(b) จงพิสูจน์ว่าค่าของ M ไม่ขึ้นอยู่กับการเล่นของขงจื้อ

(สังเกตว่า $\gcd(x, y)$ แทนตัวหารร่วมมากของจำนวนเต็มบวก x และ y และ $\text{lcm}(x, y)$ แทนตัวคูณร่วมน้อยของ x และ y)

โจทย์ข้อ 2. ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม และให้จุด M และจุด N เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AB และด้าน AC ตามลำดับ ให้จุด K และจุด L เป็นจุดภายในรูปสามเหลี่ยม BMC และรูปสามเหลี่ยม BNC ตามลำดับโดยที่ จุด K อยู่ภายในรูปสามเหลี่ยม ABL และจุด L อยู่ภายในรูปสามเหลี่ยม AKC สมมติว่า

$$\angle KBA = \angle ACL \quad \angle LBK = \angle LNC \quad \text{และ} \quad \angle LCK = \angle BMK$$

ให้ O เป็นจุดศูนย์กลางวงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม AKL จงพิสูจน์ว่า $OM = ON$

โจทย์ข้อ 3. ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก หลิวและซางมีท่อนไม้ยาว 1 หน่วย ที่พวกเขาต้องการแบ่งระหว่างกัน หลิวเลือกทำเครื่องหมายบนจุดอย่างมาก n จุดบนท่อนไม้ จากนั้นซางเลือกทำเครื่องหมายบนจุดอย่างมาก n จุดบนท่อนไม้ จุดที่ถูกทำเครื่องหมายเป็นจุดที่แตกต่างกัน หลังจากนั้นท่อนไม้ถูกตัดที่จุดทั้งหมดที่ถูกทำ เครื่องหมายไว้ออกเป็นท่อน ๆ ต่อมาพวกเขาผลัดกันเลือกท่อนไม้ที่ยังไม่ถูกเลือก โดยหลิวเป็นคนเริ่มเลือกก่อน เป้าหมายของผู้เล่นแต่ละคนคือทำให้ความยาวรวมของท่อนไม้ที่ตนเลือกมีค่ามากที่สุด สำหรับแต่ละค่า n จงหาค่า c ที่มากที่สุดที่หลิวสามารถรับประกันความยาวรวมอย่างน้อย c ไม่ว่าซางจะเล่นอย่างไร



พฤษภาคม 16, 16. กรกฎาคม 2026

โจทย์ข้อ 4. ชานหุยและมู่หลานเล่นเกมกันอยู่ ให้ θ เป็นมุมที่ $0^\circ < \theta < 180^\circ$ ซึ่งผู้เล่นทั้งสองฝ่ายทราบในตอนเริ่มต้น ชานหุยตัดกระดาษเป็นรูปสามเหลี่ยม T โดยกำหนดขนาดตามที่เขาคต้องการ จากนั้นพวกเขาทำตามขั้นตอนต่อไปนี้ไปเรื่อย ๆ

- ถ้า T มีมุมอย่างน้อยหนึ่งมุมที่มีขนาดเท่ากับ θ พอดี จะถือว่าเกมจบลงทันทีและมู่หลานเป็นฝ่ายชนะ
- ถ้าไม่เช่นนั้น มู่หลานเลือกจุด P บนเส้นรอบรูปของ T ที่ไม่ใช่จุดยอดทั้งสามจุด จากนั้นมู่หลานจะตัดตามแนวเส้นตรงจากจุด P ไปยังจุดยอดของ T ที่อยู่ตรงข้ามกัน แบ่งรูปสามเหลี่ยมออกเป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูป
- ชานหุยเลือกทั้งรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งจากสองรูป สามเหลี่ยมที่เหลืออีกรูปกลายเป็นรูปสามเหลี่ยม T รูปใหม่

จงหาค่าของ θ ที่เป็นจำนวนจริงทั้งหมดที่มู่หลานสามารถรับประกันว่าเธอจะสามารถชนะได้ภายในจำนวนขั้นตอนที่จำกัด ไม่ว่าชานหุยจะเล่นอย่างไร

โจทย์ข้อ 5. ให้ $\mathbb{R}_{>0}$ เป็นเซตของจำนวนจริงบวก จงหาฟังก์ชัน $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ ทั้งหมดที่ทำให้

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)}$$

สำหรับทุกค่า $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$

โจทย์ข้อ 6. ให้ $a_1, a_2, a_3, \dots$ เป็นลำดับอนันต์ของจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 สมมติว่าสำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จำนวน a_{n+1} เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่มากกว่า a_n โดยที่ $\gcd(a_{n+1}, a_i) > 1$ สำหรับทุก $i = 1, 2, \dots, n$

จงพิสูจน์ว่ามีจำนวนเต็มบวก T และ L ที่ทำให้

$$a_{n+T} = a_n + L$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

(สังเกตว่า $\gcd(x, y)$ แทนตัวหารร่วมมากของจำนวนเต็มบวก x และ y)