



onsdag, 15. juli 2026

Problem 1. På en tavla står 2026 inte nödvändigtvis olika heltal, alla större än 1. I ett drag väljer Konfucius två heltal $m > 1$ och $n > 1$ från olika platser på tavlan och ersätter dem med

$$\gcd(m, n) \quad \text{och} \quad \frac{\text{lcm}(m, n)}{\gcd(m, n)}.$$

Han fortsätter göra sådana drag så länge det är möjligt.

(a) Visa att det, oberoende av hans val, efter ändligt många drag kommer att finnas exakt ett heltal M på tavlan som är större än 1.

(b) Visa att värdet av M är oberoende av Konfucius val av drag.

(Notera att $\gcd(x, y)$ betecknar den största gemensamma delaren av de positiva heltalen x och y , och $\text{lcm}(x, y)$ betecknar den minsta gemensamma multipeln av x och y .)

Problem 2. Låt ABC vara en triangel och låt punkterna M och N vara mittpunkterna på sidorna AB respektive AC . Punkterna K och L väljs strikt inuti trianglarna BMC respektive BNC så att K ligger strikt inuti triangel ABL och L ligger strikt inuti triangel AKC . Antag att

$$\angle KBA = \angle ACL, \quad \angle LBK = \angle LNC, \quad \text{och} \quad \angle LCK = \angle BMK.$$

Låt O vara medelpunkten till den omskrivna cirkeln till triangel AKL . Visa att $OM = ON$.

Problem 3. Låt n vara ett positivt heltal. Liu Bang och Xiang Yu har en pinne av längd 1 som de vill dela på. Liu markerar högst n punkter på pinnen och sedan markerar Xiang högst n punkter på pinnen. De markerade punkterna är olika. Efteråt sågas pinnen vid alla markerade punkter, vilket skapar ett antal bitar. Sedan turas Liu och Xiang om med att varje gång ta en av de kvarvarande bitarna. Liu börjar. Varje spelare har som mål att maximera den totala längden av bitarna som han själv tog.

Bestäm för varje n det största värdet c sådant att Liu kan garantera att totala längden av hans bitar är minst c oberoende av hur Xiang spelar.



torsdag, 16. juli 2026

Problem 4. Shan-Yu och Mulan spelar ett spel. Låt θ vara en vinkel som uppfyller $0^\circ < \theta < 180^\circ$ och som är känd för båda spelarna. I början skapar Shan-Yu en papperstriangel $\mathcal{T}$ med mått som han själv väljer. Efteråt upprepar de följande steg:

- Om $\mathcal{T}$ har minst en vinkel lika med θ avslutas spelet och Mulan vinner.
- Annars väljer Mulan en punkt P på omkretsen av $\mathcal{T}$, skild från alla tre hörn. Sedan skär hon triangeln längs sträckan från P till det motsatta hörnet i $\mathcal{T}$ och delar den därmed i två trianglar.
- Shan-Yu slänger en av de två trianglarna. Den triangel som är kvar blir den nya $\mathcal{T}$.

För vilka reella värden av θ kan Mulan garantera sin vinst på ändligt många steg oberoende av hur Shan-Yu spelar?

Problem 5. Låt $\mathbb{R}_{>0}$ vara mängden av alla positiva reella tal. Bestäm alla funktioner $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ sådana att

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)}$$

för varje $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.

Problem 6. Låt $a_1, a_2, a_3, \dots$ vara en oändlig följd av positiva heltal större än 1. Antag att talet a_{n+1} för alla positiva heltal n är det minsta positiva heltal större än a_n sådant att $\gcd(a_{n+1}, a_i) > 1$ för varje $i = 1, 2, \dots, n$. Visa att det existerar positiva heltal T och L sådana att

$$a_{n+T} = a_n + L$$

för varje positivt heltal n . (Notera att $\gcd(x, y)$ betecknar den största gemensamma delaren av de positiva heltalen x och y .)