



среда, 15. јул 2026

Задатак 1. На табли је написано 2026, не нужно различитих, природних бројева већих од 1. У једном потезу Конфучије бира два броја $m > 1$ и $n > 1$, која су написана на различитим позицијама на табли, и замењује их са

$$\text{нзд}(m, n) \quad \text{и} \quad \frac{\text{нзс}(m, n)}{\text{нзд}(m, n)}.$$

Он наставља да извршава ове потезе докле год је то могуће.

(a) Доказати да без обзира на изборе које Конфучије прави, након коначно много потеза, тачно један број M на табли је већи од 1.

(b) Доказати да вредност броја M не зависи од избора које Конфучије прави.

(Напомена: Са $\text{нзд}(x, y)$ означавамо највећи заједнички делилац природних бројева x и y , док са $\text{нзс}(x, y)$ означавамо најмањи заједнички садржалац природних бројева x и y .)

Задатак 2. Нека је ABC троугао и нека су тачке M и N средишта страница AB и AC , редом. Нека су тачке K и L одабране строго унутар троуглова BMC и BNC , редом, тако да тачка K лежи строго унутар троугла ABL , а да тачка L лежи строго унутар троугла AKC . Претпоставимо да важи

$$\angle KBA = \angle ACL, \quad \angle LBK = \angle LNC \quad \text{и} \quad \angle LCK = \angle BMK.$$

Нека је O центар описане кружнице троугла AKL . Доказати да је $OM = ON$.

Задатак 3. Нека је n природан број. Лиу Банг и Хуанг Ју имају штап дужине 1 и желе да га поделе између себе. Лиу означава највише n тачака на штапу, а затим Хуанг такође означава највише n тачака на штапу. Све означене тачке су различите. Они затим пресецају штап на свим означеним тачкама, чиме добијају одређени број комада. Након тога, наизменично повлаче потезе, при чему потез подразумева узимање једног комада који није раније узет. Лиу игра први. Сваки од играча жели да максимизује укупну дужину комада које је узео. За свако n одредити највећи реалан број c такав да Лиу може са сигурношћу постићи укупну дужину од барем c , без обзира како Хуанг игра.



четвртак, 16. јул 2026

Задатак 4. Шан-Ју и Мулан играју игру. Нека је θ угао за који важи $0^\circ < \theta < 180^\circ$ и чију вредност знају оба играча. На почетку Шан-Ју прави папирни троугао $\mathcal{T}$ димензија које он жели. Затим, играчи понављају следеће кораке:

- Ако $\mathcal{T}$ има барем један угао чија је мера тачно θ , игра се завршава и Мулан побеђује.
- У супротном, Мулан бира тачку P на страницама троугла $\mathcal{T}$, различиту од његових темена. Она затим сече троугао $\mathcal{T}$ по дужи која спаја тачку P са наспрамним теменом троугла $\mathcal{T}$, чиме дели троугао $\mathcal{T}$ на два троугла.
- Шан-Ју одбацује један од два новонастала троугла. Преостали троугао постаје нови троугао $\mathcal{T}$.

За које реалне вредности θ Мулан може гарантовати победу у коначно много корака, без обзира на то како Шан-Ју игра?

Задатак 5. Са $\mathbb{R}_{>0}$ ћемо означити скуп свих позитивних реалних бројева. Одредити све функције $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ такве да неједнакост

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)}$$

важи за све $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.

Задатак 6. Нека је $a_1, a_2, a_3, \dots$ бесконачан низ природних бројева већих од 1. Претпоставимо да је за све природне бројеве n број a_{n+1} најмањи природан број већи од a_n са особином да за све природне бројеве $i = 1, 2, \dots, n$ важи $\text{нзд}(a_{n+1}, a_i) > 1$. Доказати да постоје природни бројеви T и L такви да важи

$$a_{n+T} = a_n + L,$$

за сваки природан број n .

(Напомена: Са $\text{нзд}(x, y)$ смо означили највећи заједнички делилац природних бројева x и y .)