



сриједа, 15. јули 2026

Задатак 1. На табли је написано 2026 не нужно различитих цијелих бројева већих од 1. У једном потезу Конфучије бира два броја $m > 1$ и $n > 1$ написана на различитим позицијама на табли и замјенјује ова два броја са

$$\text{нзд}(m, n) \quad \text{и} \quad \frac{\text{нзс}(m, n)}{\text{нзд}(m, n)}.$$

Он наставља извршавати ове потезе док год је то могуће.

(a) Доказати да, без обзира на изборе које Конфучије прави, након коначно много потеза тачно један број M на табли је већи од 1.

(b) Доказати да вриједност броја M не овиси од избора које Конфучије прави.

(Напомена: $\text{нзд}(x, y)$ означава највећи заједнички дјелилац позитивних цијелих бројева x и y , а $\text{нзс}(x, y)$ означава најмањи заједнички садржилац позитивних цијелих бројева x и y .)

Задатак 2. Нека је ABC троугао и нека су тачке M и N средишта страница AB и AC , редом. Нека су тачке K и L одабране строго унутар троуглова BMC и BNC , редом, тако да K лежи строго унутар троугла ABL и L лежи строго унутар троугла AKC . Претпоставимо да вриједи

$$\angle KBA = \angle ACL, \quad \angle LBK = \angle LNC, \quad \text{и} \quad \angle LCK = \angle BMK.$$

Нека је O центар описане кружнице троугла AKL . Доказати $OM = ON$.

Задатак 3. Нека је n позитиван цијели број. Liu Bang и Xiang Yu имају штап дужине 1 и желе да га подијеле између себе. Liu означава највише n тачака на штапу, а затим Xiang такођер означава највише n тачака на штапу. Све означене тачке су различите. Затим они пресијеку штап на свим означеним тачкама чиме добијају одређен број комада. Након тога наизмјенично повлаче потезе, при чему потез подразумијева узимање једног комада који није раније узет. Liu игра први. Сваки од играча жели максимизирати укупну дужину комада које је узео.

За свако n одредити највећи реалан број c тако да Liu може са сигурношћу постићи укупну дужину од барем c , без обзира како Xiang игра.



четвртак, 16. јули 2026

Задатак 4. Shan-Yu и Mulan играју игру. Нека је θ угао за који вриједи $0^\circ < \theta < 180^\circ$ и чију вриједност знају оба играча. На почетку Shan-Yu прави папирни троугао $\mathcal{T}$ димензија које он жели. Затим играчи понављају следеће кораке:

- Ако $\mathcal{T}$ има барем један угао чија је мјера тачно θ , игра завршава и Mulan побеђује.
- У супротном, Mulan бира тачку P на једној од страница троугла $\mathcal{T}$, различиту од његових тјемена. Она затим сијече троугао $\mathcal{T}$ по дужи која спаја P са наспрамним тјемом од $\mathcal{T}$, чиме дијели $\mathcal{T}$ на два троугла.
- Shan-Yu одбацује један од два новонастала троугла. Преостали троугао постаје нови $\mathcal{T}$.

За које реалне вриједности θ Mulan може гарантовати побједу у коначно много корака, без обзира на то како Shan-Yu игра?

Задатак 5. Са $\mathbb{R}_{>0}$ означимо скуп позитивних реалних бројева. Одредити све функције $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ такве да

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)}$$

бриједи за све $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.

Задатак 6. Нека је $a_1, a_2, a_3, \dots$ бесконачан низ позитивних цијелих бројева већих од 1. Претпоставимо да за све позитивне цијеле бројеве n вриједи да је a_{n+1} најмањи позитиван цијели број већи од a_n са особином да за све $i = 1, 2, \dots, n$ вриједи $\text{нзд}(a_{n+1}, a_i) > 1$. Доказати да постоје позитивни цијели бројеви T и L такви да

$$a_{n+T} = a_n + L$$

вриједи за све позитивне цијеле бројеве n .

(Напомена: $\text{нзд}(x, y)$ означава највећи заједнички дјелилац позитивних цијелих бројева x и y .)