



Miércoles 15 de julio de 2026

Problema 1. En una pizarra hay escritos 2026 números enteros mayores que 1 no necesariamente distintos. En cada paso, Confucio elige dos números $m > 1$ y $n > 1$ de lugares distintos de la pizarra y sustituye los números de esos dos lugares por

$$\text{mcd}(m, n) \quad \text{y} \quad \frac{\text{mcm}(m, n)}{\text{mcd}(m, n)}.$$

Él continúa haciendo pasos mientras sea posible hacerlo.

- (a) Demostrar que, después de un número finito de pasos, entre los 2026 números de la pizarra habrá exactamente un número M mayor que 1 independientemente de las elecciones que haya hecho Confucio.
- (b) Demostrar que el valor de M no depende de las elecciones que haya hecho Confucio.

(Nota: $\text{mcd}(a, b)$ denota el máximo común divisor de los enteros positivos a y b , y $\text{mcm}(a, b)$ denota el mínimo común múltiplo de a y b .)

Problema 2. Sea ABC un triángulo y sean M y N los puntos medios de los lados AB y AC respectivamente. Sean K y L puntos estrictamente en el interior de los triángulos BMC y BNC , respectivamente, tales que K está estrictamente en el interior del triángulo ABL y L está estrictamente en el interior del triángulo AKC . Supongamos que

$$\angle KBA = \angle ACL, \quad \angle LBK = \angle LNC \quad \text{y} \quad \angle LCK = \angle BMK.$$

Sea O el circuncentro del triángulo AKL . Demostrar que $OM = ON$.

Problema 3. Sea n un entero positivo. Liu Bang y Xiang Yu tienen una varilla de longitud 1 y quieren cortarla y repartírsela entre ellos. Liu marca como mucho n puntos en la varilla y después Xiang marca como mucho n puntos en la varilla. Los puntos marcados son distintos. Entonces la varilla se corta por todos los puntos marcados obteniéndose así una cierta cantidad de piezas. Después, por turnos, cada uno recoge una de las piezas que no se haya repartido aún, empezando por Liu. El objetivo de cada uno es maximizar la suma de las longitudes de sus piezas.

Para cada n , determinar el mayor valor c tal que Liu puede asegurarse una longitud total mayor o igual a c , independientemente de las elecciones de Xiang.



Jueves 16 de julio de 2026

Problema 4. Shan-Yu y Mulán juegan un juego. Sea θ con $0^\circ < \theta < 180^\circ$ la medida de un ángulo conocida por ambos. Al inicio, Shan-Yu hace un triángulo de papel $\mathcal{T}$ con medidas de su elección. Luego realizan repetidamente los siguientes pasos:

- Si $\mathcal{T}$ tiene al menos un ángulo de medida exactamente θ , entonces el juego termina y Mulán gana.
- En caso contrario, Mulán escoge un punto P en el perímetro de $\mathcal{T}$, distinto de sus vértices, y realiza un corte recto desde P al vértice opuesto de $\mathcal{T}$, dividiéndolo en dos triángulos.
- Shan-Yu descarta uno de los dos triángulos. El triángulo restante se convierte en el nuevo $\mathcal{T}$.

Determinar todos los valores de θ para los cuales Mulán puede asegurar su victoria en una cantidad finita de pasos sin importar cómo juegue Shan-Yu.

Problema 5. Sea $\mathbb{R}_{>0}$ el conjunto de los números reales positivos. Determinar todas las funciones $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ tales que

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)}$$

para todos los $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.

Problema 6. Sea $a_1, a_2, a_3, \dots$ una sucesión infinita de enteros positivos mayores que 1. Supongamos que, para todo entero positivo n , el número a_{n+1} es el menor entero positivo mayor que a_n tal que $\text{mcd}(a_{n+1}, a_i) > 1$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Demostrar que existen enteros positivos T y L tales que

$$a_{n+T} = a_n + L$$

para todo entero positivo n .

(Nota: $\text{mcd}(a, b)$ denota el máximo común divisor de los enteros positivos a y b .)