



sreda, 15. julij 2026

Naloga 1. Na tabli je zapisanih 2026 naravnih števil, večjih od 1, ki niso nujno različna. V vsaki potezi Konfucij izbere dve naravni števili $m > 1$ in $n > 1$, ki sta zapisani na različnih mestih na tabli, in ju zamenja z

$$D(m, n) \quad \text{in} \quad \frac{v(m, n)}{D(m, n)}.$$

S potezami nadaljuje, dokler je to mogoče.

(a) Dokaži, da bo, ne glede na Konfucijeve izbire, po končno mnogo potezih natanko eno naravno število M na tabli večje od 1.

(b) Dokaži, da vrednost števila M ni odvisna od Konfucijevih izbir.

(Izraz $D(x, y)$ označuje največji skupni delitelj naravnih števil x in y , izraz $v(x, y)$ pa označuje najmanjši skupni večkratnik naravnih števil x in y .)

Naloga 2. Naj bo ABC trikotnik, naj bo točka M razpolovišče stranice AB in točka N razpolovišče stranice AC . Točko K izberemo v notranjosti trikotnika BMC in točko L v notranjosti trikotnika BNC , tako da K leži v notranjosti trikotnika ABL in L leži v notranjosti trikotnika AKC . Predpostavimo, da velja

$$\angle KBA = \angle ACL, \quad \angle LBK = \angle LNC \quad \text{in} \quad \angle LCK = \angle BMK.$$

Naj bo O središče očrtane krožnice trikotnika AKL . Dokaži, da je $|OM| = |ON|$.

Naloga 3. Naj bo n naravno število. Liu Bang in Xiang Yu imata palico dolžine 1, ki si jo hočeta razdeliti. Najprej Liu označi največ n točk na palici in nato še Xiang označi največ n točk na palici. Pri tem so označene točke različne. Nato palico prerežeta pri vsaki označeni točki, s čimer jo razdelita na več delov. Zatem izmenično jemljeta dele palice, ki jih še nista vzela, pri čemer začne Liu. Vsak igralec želi maksimizirati skupno dolžino svojih delov.

Za vsak n določi največjo vrednost c , za katero lahko Liu zagotovi, da bo skupna dolžina njegovih delov vsaj c , ne glede na Xiangovo strategijo.



četrtek, 16. julij 2026

Naloga 4. Shan-Yu in Mulan igrata igro. Naj bo θ kot, $0^\circ < \theta < 180^\circ$, katerega velikost poznata oba igralca. Na začetku igre Shan-Yu naredi papirnati trikotnik $\mathcal{T}$ z merami po lastni izbiri. Nato igralca ponavljata naslednje korake:

- Če je vsaj eden izmed kotov trikotnika $\mathcal{T}$ velik natanko θ , se igra konča in Mulan zmaga.
- Sicer Mulan izbere točko P na eni izmed stranic trikotnika $\mathcal{T}$, različno od njegovih oglišč. Nato naredi raven rez od točke P do nasprotnega oglišča trikotnika $\mathcal{T}$ in trikotnik s tem razdeli na dva trikotnika.
- Shan-Yu zavrže enega izmed dveh nastalih trikotnikov. Preostali trikotnik postane nov trikotnik $\mathcal{T}$.

Za katere realne vrednosti θ lahko Mulan zagotovi, da zmaga v končno mnogo korakih, ne glede na to, kako igra Shan-Yu?

Naloga 5. Z $\mathbb{R}_{>0}$ označimo množico pozitivnih realnih števil. Določi vse funkcije $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, tako da velja

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)}$$

za vsaka $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.

Naloga 6. Naj bo $a_1, a_2, a_3, \dots$ neskončno zaporedje naravnih števil, večjih od 1. Naj bo za vsako naravno število n število a_{n+1} najmanjše naravno število večje od a_n , za katero je $D(a_{n+1}, a_i) > 1$ za vsak $i = 1, 2, \dots, n$. Dokaži, da obstajata naravni števili T in L , tako da velja

$$a_{n+T} = a_n + L$$

za vsako naravno število n .

(Izraz $D(x, y)$ označuje največji skupni delitelj naravnih števil x in y .)