



streda, 15. júla 2026

Úloha 1. Na tabuli je napísaných 2026 nie nutne rôznych celých čísel väčších než 1. V jednom ťahu Konfucius vyberie dve celé čísla $m > 1$ a $n > 1$ z rôznych pozícií na tabuli a nahradí tieto dve čísla s

$$D(m, n) \quad \text{a} \quad \frac{n(m, n)}{D(m, n)}.$$

Konfucius pokračuje vo vykonávaní ľubovoľných ťahov, kým je to možné.

(a) Dokážte, že nezávisle na ťahoch Konfucia sa po konečne veľa krokoch na tabuli zostane práve jedno celé číslo M väčšie ako 1.

(b) Dokážte, že hodnota M nezávisí od Konfuciových volieb ťahov.

(Výrazy $D(x, y)$, resp. $n(x, y)$ označujú najväčší spoločný deliteľ, resp. najmenší spoločný násobok kladných celých čísel x a y .)

Úloha 2. Je daný trojuholník ABC . Body M resp. N označujú stredy strán AB resp. AC . Zvoľme body K a L v prísnom vnútrajšku trojuholníkov BMC resp. BNC tak, že K leží v prísnom vnútrajšku trojuholníka ABL a L leží v prísnom vnútrajšku trojuholníka AKC . Predpokladajme, že

$$|\angle KBA| = |\angle ACL|, \quad |\angle LBK| = |\angle LNC| \quad \text{a} \quad |\angle LCK| = |\angle BMK|.$$

O označuje stred kružnice opísanej AKL . Dokážte, že $|OM| = |ON|$.

Úloha 3. Nech n je kladné celé číslo. Liu Bang a Xiang Yu majú palicu dĺžky 1 a chcú ju rozdeliť medzi sebou. Najprv Liu vyznačí najviac n bodov na palici, a potom Xiang vyznačí najviac n bodov na palici. Vyznačené body sú navzájom rôzne. Palicu potom rozrežú v každom vyznačenom bode. Zo vzniknutých kúskov si striedavo vyberajú zatiaľ nevybrané kúsky pre seba, začína Liu. Cieľom každého z nich je maximalizovať sumu dĺžok svojich kúskov.

Pre všetky n určte najväčšiu hodnotu c , pre ktorú vie Liu garantovať, že suma dĺžok jeho kúskov je aspoň c , nezávisle na tom, čo spraví Xiang.



štvrtok, 16. júla 2026

Úloha 4. Shan-Yu a Mulan hrajú hru. Uhol θ splňa $0^\circ < \theta < 180^\circ$ a oba hráči ho znajú. Na začiatku hry Shan-Yu si vystrihne z papiera trojuholník $\mathcal{T}$ s rozmermi podľa vlastného výberu. Potom sa opakujú tieto kroky:

- Ak aspoň jeden z uhlov $\mathcal{T}$ má práve veľkosť θ , tak sa hra končí a Mulan vyhráva.
- V opačnom prípade Mulan si vyberie bod P po obode $\mathcal{T}$ rôzny od troch vrcholov. Potom rozdelí $\mathcal{T}$ na dva trojuholníky po spojnici P s protilahlým vrcholom.
- Shan-Yu zahodí jednu z dvoch vzniknutých trojuholníkov. Zo zostávajúceho trojuholníka sa stáva nový $\mathcal{T}$.

Pre ktoré reálne hodnoty θ vie Mulan zaručiť svoju výhru v konečne veľa krokoch nezávisle na tom, ako hrá Shan-Yu?

Úloha 5. Nech $\mathbb{R}_{>0}$ značí množinu kladných reálnych čísel. Nájdite všetky funkcie $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ splňujúce

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)}$$

pre všetky $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.

Úloha 6. Nech $a_1, a_2, a_3, \dots$ je nekonečná postupnosť kladných celých čísel väčších než 1. Predpokladajme, že pre všetky kladné celé čísla n je člen a_{n+1} najmenšie kladné celé číslo väčšie než a_n také, že $D(a_{n+1}, a_i) > 1$ pre každé $i = 1, 2, \dots, n$. Dokážte, že existujú kladné celé čísla T a L také, že

$$a_{n+T} = a_n + L$$

pre všetky kladné celé n .

(Výraz $D(x, y)$ označuje najväčší spoločný deliteľ kladných celých čísel x a y .)