



среда, 15 июля 2026

Задача 1. Доска разделена на 2026 частей. В каждой части написано по одному целому числу, большему 1 (числа на доске не обязательно различны). Время от времени Пафнутий выполняет следующие действия. Он выбирает две различные части доски, числа в которых больше 1. Обозначим число в первой из частей через m , а во второй — через n . Пафнутий заменяет эти два числа на числа

$$\text{НОД}(m, n) \quad \text{и} \quad \frac{\text{НОК}(m, n)}{\text{НОД}(m, n)}.$$

Он продолжает эти действия, пока возможно.

- (a) Докажите, что независимо от действий Пафнутия рано или поздно только в одной из частей будет написано число, большее 1. Обозначим это число через M .
- (b) Докажите, что значение M не зависит от действий Пафнутия.

(Здесь $\text{НОД}(x, y)$ обозначает наибольший общий делитель целых положительных чисел x и y , а $\text{НОК}(x, y)$ обозначает наименьшее общее кратное x и y .)

Задача 2. Дан треугольник ABC . Точки M и N — середины его сторон AB и AC соответственно. Точки K и L выбраны строго внутри треугольников BMC и BNC соответственно, причём точка K лежит строго внутри треугольника ABL , а точка L лежит строго внутри треугольника AKC . Оказалось, что

$$\angle KBA = \angle ACL, \quad \angle LBK = \angle LNC \quad \text{и} \quad \angle LCK = \angle BMK.$$

Точка O — центр окружности, описанной около треугольника AKL . Докажите, что $OM = ON$.

Задача 3. Дано целое положительное число n . У Карлсона и Малыша есть палка длины 1, которую они делят между собой. Сначала Карлсон отмечает на палке не более чем n точек. Затем Малыш отмечает на палке не более чем n точек. Все отмеченные точки должны быть различны. Затем палка разрезается по отмеченным точкам, при этом образуются куски-палочки. После этого Карлсон и Малыш поочерёдно берут себе по одной палочке, начинает Карлсон. Так продолжается, пока они не разберут все палочки. Цель каждого — максимизировать суммарную длину своих палочек. При каждом n определите наибольшее значение s , для которого Карлсон может обеспечить себе суммарную длину палочек, не меньшую s , независимо от действий Малыша.



четверг, 16 июля 2026

Задача 4. Дан угол θ , причём $0^\circ < \theta < 180^\circ$. Величина угла θ известна Пьеру и Наташе. Они играют в следующую игру. Изначально Пьер вырезает из бумаги треугольник $\mathcal{T}$ по своему усмотрению. Затем они последовательно выполняют ходы по следующим правилам:

- Если хотя бы один из углов треугольника $\mathcal{T}$ равен θ , то игра заканчивается победой Наташи.
- В противном случае Наташа разрезает треугольник $\mathcal{T}$ на два треугольника (по отрезку, соединяющему выбираемую ею точку P на границе треугольника $\mathcal{T}$, отличную от вершин $\mathcal{T}$, с противоположной вершиной $\mathcal{T}$).
- Пьер выбрасывает один из этих треугольников, а второй треугольник становится новым $\mathcal{T}$.

Для каких вещественных значений θ Наташа может гарантировать себе победу за конечное число ходов независимо от действий Пьера?

Задача 5. Обозначим через $\mathbb{R}_{>0}$ множество всех положительных вещественных чисел. Найдите все такие функции $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, что

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)}$$

при всех $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.

Задача 6. Пусть $a_1, a_2, a_3, \dots$ — бесконечная последовательность целых чисел, больших 1. Оказалось, что для каждого целого положительного числа n выполняется следующее условие: наименьшее целое число $t > a_n$, для которого $\text{НОД}(t, a_i) > 1$ при всех $i = 1, 2, \dots, n$, равно a_{n+1} . Докажите, что найдутся такие целые положительные числа T и L , что

$$a_{n+T} = a_n + L$$

при всех целых положительных n .

(Напомним, что $\text{НОД}(x, y)$ обозначает наибольший общий делитель чисел x и y .)