



miercuri, 15 iulie 2026

Problema 1. Pe o tablă sunt scrise 2026 de numere naturale strict mai mari decât 1, nu neapărat diferite. La o mutare, Confucius alege două numere naturale $m > 1$ și $n > 1$, aflate pe tablă în locuri diferite, și înlocuiește aceste două numere cu

$$\gcd(m, n) \quad \text{și} \quad \frac{\text{lcm}(m, n)}{\gcd(m, n)}.$$

El continuă să facă astfel de mutări atâta timp cât este posibil.

(a) Demonstrați că, indiferent de alegerile lui Confucius, după un număr finit de mutări, exact un singur număr natural M de pe tablă este strict mai mare decât 1.

(b) Demonstrați că valoarea lui M nu depinde de alegerile lui Confucius.

(Menționăm că $\gcd(x, y)$ reprezintă cel mai mare divizor comun al numerelor naturale nenule x și y , iar $\text{lcm}(x, y)$ reprezintă cel mai mic multiplu comun al numerelor x și y .)

Problema 2. Fie triunghiul ABC și fie punctele M și N mijloacele laturilor AB și respectiv AC . Punctele K și L sunt alese strict în interiorul triunghiurilor BMC și respectiv BNC , astfel încât K se află strict în interiorul triunghiului ABL , iar L se află strict în interiorul triunghiului AKC . Presupunem că

$$\angle KBA = \angle ACL, \quad \angle LBK = \angle LNC, \quad \text{și} \quad \angle LCK = \angle BMK.$$

Fie O centrul cercului circumscris triunghiului AKL . Demonstrați că $OM = ON$.

Problema 3. Fie n un număr natural nenul. Liu și Xiang au un băț de lungime 1 și vor să-l împartă între ei. Liu marchează pe băț cel mult n puncte, și apoi Xiang marchează pe băț cel mult n puncte. Toate punctele marcate sunt distincte. Apoi, bățul este tăiat în toate punctele marcate, obținându-se un număr de bucăți. După aceea, pe rând, începând cu Liu, ei își aleg câte o bucată oarecare dintre cele nealese. Scopul fiecărui jucător este să maximizeze lungimea totală a bucăților sale.

Pentru fiecare n , determinați cea mai mare valoare posibilă c astfel încât, indiferent de cum joacă Xiang, Liu obține sigur o lungime totală de cel puțin c .



joi, 16 iulie 2026

Problema 4. Shan-Yu și Mulan joacă un joc. Fie θ un unghi cu $0^\circ < \theta < 180^\circ$, cunoscut de ambii jucători. Inițial Shan-Yu face un triunghi $\mathcal{T}$ de hârtie având dimensiunile alese de el. Apoi, ei repetă următorii pași:

- Dacă $\mathcal{T}$ are cel puțin un unghi de măsură exact θ , jocul se oprește și Mulan câștigă.
- Altfel, Mulan alege un punct P , diferit de cele trei vârfuri, pe una dintre laturile triunghiului $\mathcal{T}$. Apoi ea face o tăietură dreaptă a triunghiului $\mathcal{T}$ de la punctul P până la vârful triunghiului $\mathcal{T}$, opus laturii respective, împărțindu-l în două triunghiuri.
- Shan-Yu elimină unul dintre cele două triunghiuri. Triunghiul rămas devine noul triunghi $\mathcal{T}$.

Pentru ce valori reale ale lui θ Mulan poate avea garanția că va câștiga după un număr finit de pași, indiferent de cum joacă Shan-Yu?

Problema 5. Fie $\mathbb{R}_{>0} = (0, +\infty)$ mulțimea numerelor reale strict pozitive. Determinați toate funcțiile $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ astfel încât

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)}$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.

Problema 6. Fie $a_1, a_2, a_3, \dots$ un șir infinit de numere naturale strict mai mari decât 1. Presupunem că pentru orice număr natural nenul n , numărul a_{n+1} este cel mai mic număr natural nenul strict mai mare decât a_n astfel încât $\gcd(a_{n+1}, a_i) > 1$ pentru orice $i = 1, 2, \dots, n$. Demonstrați că există numerele naturale nenule T și L astfel încât

$$a_{n+T} = a_n + L$$

pentru orice număr natural nenul n .

(Menționăm că $\gcd(x, y)$ reprezintă cel mai mare divizor comun al numerelor naturale nenule x și y .)