



Quarta-feira, 15 de julho de 2026

Problema 1. Há 2026 inteiros maiores que 1 escritos num quadro negro, não necessariamente distintos. Num movimento, Confúcius escolhe dois inteiros $m > 1$ e $n > 1$ em lugares diferentes do quadro e substitui esses dois inteiros por

$$\text{mdc}(m, n) \quad \text{e} \quad \frac{\text{mmc}(m, n)}{\text{mdc}(m, n)}.$$

Ele continua a fazer movimentos enquanto for possível.

(a) Prove que, independentemente das escolhas de Confúcius, após um número finito de movimentos, exatamente um inteiro M no quadro é maior do que 1.

(b) Prove que o valor de M não depende das escolhas de Confúcius.

(Note que $\text{mdc}(x, y)$ denota o máximo divisor comum dos inteiros positivos x e y , e $\text{mmc}(x, y)$ denota o mínimo múltiplo comum de x e y .)

Problema 2. Seja ABC um triângulo e sejam M e N os pontos médios dos lados AB e AC , respectivamente. Sejam K e L pontos escolhidos estritamente no interior dos triângulos BMC e BNC , respectivamente, tais que K está estritamente no interior do triângulo ABL e L está estritamente no interior do triângulo AKC . Suponha que

$$\angle KBA = \angle ACL, \quad \angle LBK = \angle LNC \quad \text{e} \quad \angle LCK = \angle BMK.$$

Seja O o circuncentro do triângulo AKL . Prove que $OM = ON$.

Problema 3. Seja n um inteiro positivo. Liu Bang e Xiang Yu têm uma vara de comprimento 1 e querem dividi-la entre eles. Liu marca no máximo n pontos na vara e depois Xiang marca no máximo n pontos na vara. Os pontos marcados são distintos. Em seguida, a vara é cortada em todos os pontos marcados, criando uma certa quantidade de pedaços. Após os cortes, cada um escolhe, alternadamente, um pedaço que ainda não foi escolhido, com Liu escolhendo primeiro. O objetivo de cada um deles é maximizar a soma dos comprimentos dos pedaços que escolheu.

Para cada n , determine o maior c tal que Liu pode garantir que a soma dos comprimentos dos pedaços que escolheu seja pelo menos c , independentemente das escolhas de Xiang.



Quinta-feira, 16 de julho de 2026

Problema 4. Shan-Yu e Mulan disputam o seguinte jogo. Seja θ a medida de um ângulo, com $0^\circ < \theta < 180^\circ$, conhecida por ambos os jogadores. Inicialmente, Shan-Yu corta um triângulo de papel $\mathcal{T}$ com medidas à sua escolha. Depois, eles repetidamente realizam os seguintes passos:

- Se $\mathcal{T}$ tem pelo menos um ângulo medindo exatamente θ , então o jogo para e Mulan vence.
- Caso contrário, Mulan escolhe um ponto P no perímetro de $\mathcal{T}$, diferente dos três vértices, e faz um corte reto de P ao vértice de $\mathcal{T}$ oposto ao lado ao qual P pertence, separando $\mathcal{T}$ em dois triângulos.
- Shan-Yu descarta um dos dois triângulos e o outro triângulo se torna o novo $\mathcal{T}$.

Para quais valores de θ , Mulan pode garantir a sua vitória após um número finito de passos, sem depender de como Shan-Yu joga?

Problema 5. Seja $\mathbb{R}_{>0}$ o conjunto dos números reais positivos. Determine todas as funções $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ tais que

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)}$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.

Problema 6. Seja $a_1, a_2, a_3, \dots$ uma sequência infinita de inteiros positivos maiores que 1. Para cada inteiro positivo n , o número a_{n+1} é o menor inteiro positivo maior que a_n tal que $\text{mdc}(a_{n+1}, a_i) > 1$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Prove que existem inteiros positivos T e L tais que

$$a_{n+T} = a_n + L$$

para todo inteiro positivo n .

(Note que $\text{mdc}(x, y)$ denota o máximo divisor comum dos inteiros positivos x e y .)