



środa, 15. lipca 2026

Zadanie 1. Na tablicy zapisano 2026 niekoniecznie różnych liczb całkowitych większych od 1. W jednym ruchu Konfucjusz wybiera dwie liczby całkowite $m > 1$ i $n > 1$ zapisane w różnych miejscach tablicy, i zastępuje je liczbami

$$\text{NWD}(m, n) \quad \text{i} \quad \frac{\text{NWW}(m, n)}{\text{NWD}(m, n)}.$$

Konfucjusz wykonuje ruchy, dopóki jest to możliwe.

(a) Udowodnić, że niezależnie od wyborów Konfucjusza, po wykonaniu skończenie wielu ruchów dokładnie jedna liczba całkowita M zapisana na tablicy będzie większa od 1.

(b) Udowodnić, że wartość M nie zależy od wyborów Konfucjusza.

(Napis $\text{NWD}(x, y)$ oznacza największy wspólny dzielnik dodatnich liczb całkowitych x i y , a $\text{NWW}(x, y)$ oznacza najmniejszą wspólną wielokrotność x i y .)

Zadanie 2. Niech ABC będzie trójkątem, a punkty M i N będą odpowiednio środkami boków AB i AC . Punkty K i L leżą ściśle wewnątrz odpowiednio trójkątów BMC i BNC w taki sposób, że K leży ściśle wewnątrz trójkąta ABL a L leży ściśle wewnątrz trójkąta AKC . Załóżmy, że

$$\angle KBA = \angle ACL, \quad \angle LBK = \angle LNC \quad \text{oraz} \quad \angle LCK = \angle BMK.$$

Oznaczmy przez O środek okręgu opisanego na trójkącie AKL . Dowieść, że $OM = ON$.

Zadanie 3. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Liu Bang oraz Xiang Yu mają patyk długości 1 i chcą podzielić go między siebie. Liu zaznacza co najwyżej n punktów na patyku, a następnie Xiang zaznacza na nim co najwyżej n punktów. Zaznaczone punkty są różne. Następnie przecinają patyk we wszystkich zaznaczonych punktach, uzyskując pewną liczbę kawałków. Po wykonaniu tej czynności na zmianę zabierają dowolny niezajęty kawałek patyka, zaczynając od Liu. Celem każdego z graczy jest uzyskanie jak największej łącznej długości własnych kawałków.

Dla każdego n wyznaczyć największą wartość c , dla której Liu może zapewnić sobie łączną długość co najmniej c , niezależnie od tego, jak gra Xiang.



czwartek, 16. lipca 2026

Zadanie 4. Shan-Yu i Mulan grają w grę. Niech θ będzie znanym obu graczom kątem takim, że $0^\circ < \theta < 180^\circ$. Na początku Shan-Yu wykonuje z papieru trójkąt $\mathcal{T}$ o wybranych przez siebie wymiarach. Następnie powtarzają następujące kroki:

- Jeśli $\mathcal{T}$ ma co najmniej jeden kąt o mierze równej θ , to gra się kończy i wygrywa Mulan.
- W przeciwnym wypadku, Mulan wybiera punkt P na obwodzie $\mathcal{T}$, różny od jego wierzchołków. Następnie wykonuje cięcie wzdłuż odcinka łączącego punkt P z przeciwległym wierzchołkiem $\mathcal{T}$, dzieląc go na dwa trójkąty.
- Shan-Yu odrzuca jeden z dwóch trójkątów. Pozostały trójkąt staje się nowym trójkątem $\mathcal{T}$.

Dla jakich wartości θ Mulan może zapewnić sobie wygraną w skończenie wielu krokach, niezależnie od tego, jak gra Shan-Yu?

Zadanie 5. Niech $\mathbb{R}_{>0}$ oznacza zbiór dodatnich liczb rzeczywistych. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ takie, że

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)}$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.

Zadanie 6. Niech $a_1, a_2, a_3, \dots$ będzie nieskończonym ciągiem dodatnich liczb całkowitych większych od 1. Załóżmy, że dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych n , liczba a_{n+1} jest najmniejszą dodatnią liczbą całkowitą większą od a_n taką, że $\text{NWD}(a_{n+1}, a_i) > 1$ dla wszystkich $i = 1, 2, \dots, n$. Wykazać, że istnieją dodatnie liczby całkowite T i L takie, że

$$a_{n+T} = a_n + L$$

dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych n .

(Napis $\text{NWD}(x, y)$ oznacza największy wspólny dzielnik dodatnich liczb całkowitych x i y .)