



چهارشنبه، ۱۵ ژوئیه ۲۰۲۶

مسئله ۱. روی یک تخته، ۲۰۲۶ عدد صحیح بزرگتر از ۱ (نه لزوماً متمایز) نوشته شده است. در هر گام، کنفوسیوس دو عدد صحیح $m > 1$ و $n > 1$ از دو جای مختلف تخته انتخاب می‌کند و آن‌ها را با دو عدد صحیح زیر جایگزین می‌کند:

$$\gcd(m, n) \quad \text{و} \quad \frac{\text{lcm}(m, n)}{\gcd(m, n)}.$$

او اینکار را تا جایی که ممکن باشد ادامه می‌دهد.

۱. ثابت کنید فارغ از انتخاب‌های کنفوسیوس، بعد از متناهی گام، دقیقاً یک عدد صحیح M بزرگتر از ۱ روی تخته می‌ماند.

۲. ثابت کنید مقدار M به انتخاب‌های کنفوسیوس بستگی ندارد.

(توجه کنید که $\gcd(x, y)$ بزرگترین مقسوم علیه مشترک اعداد صحیح مثبت x و y است و $\text{lcm}(x, y)$ کوچکترین مضرب مشترک x و y است.)

مسئله ۲. مثلث ABC مفروض است و نقاط M و N ، به ترتیب نقاط وسط اضلاع AB و AC هستند. فرض کنید نقاط K و L به ترتیب درون مثلث‌های BMC و BNC طوری انتخاب شده‌اند که K کاملاً داخل مثلث ABL است و L کاملاً داخل مثلث AKC است. فرض کنید:

$$\angle KBA = \angle ACL, \quad \angle LBK = \angle LNC, \quad \text{و} \quad \angle LCK = \angle BMK.$$

فرض کنید O مرکز دایره محیطی مثلث AKL است. نشان دهید $OM = ON$.

مسئله ۳. فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت است. لیو و شیانگ یک میله چوبی به طول ۱ دارند و می‌خواهند آن را بین خودشان تقسیم کنند. لیو حداکثر n نقطه را روی میله چوبی علامت می‌زند و سپس شیانگ حداکثر n نقطه را روی میله چوبی علامت می‌زند (نقاط علامت‌زده شده متمایز هستند). سپس میله چوبی در همه نقطه‌های علامت‌زده شده بریده می‌شود و تعدادی قطعه به دست می‌آید. پس از آن، با شروع از لیو، هر کدام به نوبت یک قطعه از قطعات انتخاب نشده را برای خود انتخاب می‌کند. هدف هر بازیکن بیشینه کردن مجموع طول قطعات خودش است.

برای هر n ، بیشترین مقدار c را بیابید که فارغ از نحوه بازی شیانگ، لیو بتواند تضمین کند جمع طول قطعاتش حداقل c می‌شود.



پنجشنبه، ۱۶ ژوئیه ۲۰۲۶

مسئله ۴. شان‌یو و مولان در حال بازی با هم هستند. فرض کنید θ یک زاویه با شرط $0^\circ < \theta < 180^\circ$ است که هر دو بازیکن مقدار آن را می‌دانند. در ابتدا، شان‌یو یک مثلث کاغذی T با اندازه‌های دلخواه خود می‌سازد. سپس، پشت سر هم گام‌های زیر را انجام می‌دهند:

- اگر T حداقل یک زاویه با اندازه دقیقاً θ داشته باشد، بازی پایان می‌یابد و مولان برنده می‌شود.
 - در غیر این صورت، مولان نقطه P روی محیط T را انتخاب می‌کند (متفاوت از سه رأس T). سپس او T را با یک برش مستقیم از P به رأس مقابل آن در T ، به دو مثلث تقسیم می‌کند.
 - شان‌یو یکی از دو مثلث را کنار می‌گذارد. مثلث باقی‌مانده تبدیل به T جدید می‌شود.
- برای چه مقادیر حقیقی‌ای از θ ، مولان می‌تواند فارغ از نحوه بازی شان‌یو، پیروزی خود را در متناهی گام تضمین کند؟

مسئله ۵. فرض کنید $\mathbb{R}_{>0}$ مجموعه اعداد حقیقی مثبت است. همه توابع $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ را بیابید به طوری که برای هر $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)}$$

مسئله ۶. دنباله $a_1, a_2, a_3, \dots$ دنباله‌ای نامتناهی از اعداد صحیح مثبت بزرگتر از ۱ است. فرض کنید برای همه اعداد صحیح مثبت n ، عدد a_{n+1} کوچکترین عدد صحیح مثبت بزرگتر از a_n است که برای هر $i = 1, 2, \dots, n$ ، $\gcd(a_{n+1}, a_i) > 1$. ثابت کنید اعداد صحیح مثبت T و L وجود دارند که برای هر عدد صحیح مثبت n :

$$a_{n+T} = a_n + L$$

(توجه کنید که $\gcd(x, y)$ بزرگترین مقسوم علیه مشترک اعداد صحیح مثبت x و y است.)