



onsdag, 15. juli 2026

Oppgave 1. På en tavle står det 2026 ikke nødvendigvis forskjellige heltall, alle større enn 1. I hvert trekk velger Konfucius to heltall $m > 1$ og $n > 1$ fra to forskjellige steder på tavlen, og erstatter disse to tallene med

$$\gcd(m, n) \quad \text{og} \quad \frac{\text{lcm}(m, n)}{\gcd(m, n)}.$$

Han fortsetter inntil det ikke er noen mulige trekk igjen.

(a) Vis at uansett Konfucius' valg, ender han etter et endelig antall trekk opp med at ett eneste tall M på tavlen er større enn 1.

(b) Vis at verdien til M ikke er avhengig av Konfucius' valg.

(Merk at $\gcd(x, y)$ betegner den største felles faktoren til de positive heltallene x og y , mens $\text{lcm}(x, y)$ betegner minste felles multiplum til x og y .)

Oppgave 2. La ABC være en trekant og la punktene M og N være midtpunktene på sidene henholdsvis AB og AC . La K og L være strengt indre punkter i trekantene henholdsvis BMC og BNC valgt slik at K er et strengt indre punkt i trekanten ABL og L er et strengt indre punkt i trekanten AKC . Anta at

$$\angle KBA = \angle ACL, \quad \angle LBK = \angle LNC, \quad \text{og} \quad \angle LCK = \angle BMK.$$

La O være omsenteret til trekanten AKL . Vis at $OM = ON$.

Oppgave 3. La n være et positivt heltall. Liu Bang og Xiang Yu har en pinne med lengde 1 og ønsker å dele den opp seg imellom. Liu markerer høyst n punkter på pinnen, etterfulgt av at Xiang også markerer høyst n punkter. De markerte punktene er alle forskjellige. Deretter kutter de pinnen ved alle markerte punkter, og får derved flere pinnestykker. Til slutt tar de vekselvis ett og ett uvalgt pinnestykke inntil alle pinnestykker er blitt valgt, der Liu har førstevalget. Hver spillers mål er å maksimere totallengden til pinnestykkene de fikk valgt.

For hver n , bestem den største mulige verdien c slik at Liu kan garantere seg en totallengde på minst c , uansett Xiangs trekk.



torsdag, 16. juli 2026

Oppgave 4. Shan-Yu og Mulan spiller et spill. La θ være en vinkel med $0^\circ < \theta < 180^\circ$ som begge spillere kjenner til. I starten lager Shan-Yu en papirtrekant $\mathcal{T}$ som han kan velge formen på. Deretter gjentar de følgende trekk:

- Dersom $\mathcal{T}$ har minst én vinkel nøyaktig lik θ , ender spillet, og Mulan vinner.
- Ellers velger Mulan et punkt P på omkretsen til $\mathcal{T}$, forskjellig fra dens tre hjørner. Deretter kutter hun $\mathcal{T}$ langs en rett linje fra P til motstående hjørne, og splitter denne derved i to trekanter.
- Shan-Yu kaster én av de to trekantene, og den gjenværende trekanten blir til den nye $\mathcal{T}$.

For hvilke reelle verdier av θ kan Mulan garantere sin seier etter endelig mange trekk, uansett hvordan Shan-Yu spiller?

Oppgave 5. La $\mathbb{R}_{>0}$ betegne mengden positive reelle tall. Bestem alle funksjoner $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ slik at

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)}$$

for alle $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.

Oppgave 6. La $a_1, a_2, a_3, \dots$ være en uendelig følge av positive heltall større enn 1. Anta at for alle positive heltall n er tallet a_{n+1} det minste positive heltallet større enn a_n slik at $\gcd(a_{n+1}, a_i) > 1$ for enhver $i = 1, 2, \dots, n$. Vis at det finnes positive heltall T og L slik at

$$a_{n+T} = a_n + L$$

for ethvert positivt heltall n .

(Merk at $\gcd(x, y)$ betegner den største felles faktoren til de positive heltallene x og y .)