



2026 оны 7 дугаар сарын 15 (Лхагва).

Бодлого 1. 2026 ширхэг 1-ээс их натурал тоо самбарт бичигдсэн байв. Нэг тоо давтагдан бичигдсэн байж болно. Мянгат нэг үйлдлээр ялгаатай байрлалд бичигдсэн 1-ээс их m , n хоёр тоог самбараас сонгон

$$\gcd(m, n), \quad \frac{\text{lcm}(m, n)}{\gcd(m, n)}$$

тоонуудаар солино. Үйлдлийг хийх боломжгүй болох хүртэл давтан хийнэ.

(a) Төгсгөлөг үйлдлийн дараа, Мянгатын сонголтоос үл хамааран, самбар дээр M гэсэн 1-ээс их тоо ганц үлдэхийг батал.

(b) M тооны утга Мянгатын сонголтуудаас үл хамаарахыг батал.

(Энд x , y натурал тоонуудын хамгийн их ерөнхий хуваагчийг $\gcd(x, y)$ гэж, хамгийн бага ерөнхий хуваагдагчийг $\text{lcm}(x, y)$ гэж тэмдэглэв.)

Бодлого 2. ABC гурвалжны AB талын дундаж цэгийг M гээд, AC талын дундаж цэгийг N гээ. BMC гурвалжны дотоод хэсэгт K цэгийг, BNC гурвалжны дотоод хэсэгт L цэгийг K цэг ABL гурвалжны дотоод хэсэгт, L цэг AKC гурвалжны дотоод хэсэгт байхаар сонгов.

$$\angle KBA = \angle ACL, \quad \angle LBK = \angle LNC, \quad \angle LCK = \angle BMK$$

байв. AKL гурвалжинд багтсан тойргийн төвийг O гэвэл $OM = ON$ байна гэж батал.

Бодлого 3. n натурал тоо гээ. Бан Лиу ба Ю Шиан хоёр 1 урттай хэрчмийг хувааж авахыг хүсчээ. Хэрчим дээр эхлээд Лиу n -ээс олонгүй цэг тэмдэглэх ба дараа нь Шиан n -ээс олонгүй цэг тэмдэглэнэ. Тэмдэглэгдсэн цэгүүд бүгд хоорондоо ялгаатай байна. Хэрчмээ тэмдэглэгдсэн бүх цэгээр таслан хэдэн хэсэгт хуваана. Тэгээд Лиугаас эхлээд, ээлжлэн, авагдаагүй байгаа хэсгүүдээс нэгийг сонгож авна. Хэн хэн нь авсан хэсгүүдийнхээ уртуудын нийлбэрийг аль болох их байлгахыг зорино.

n бүрийн хувьд, Шиан яаж тоглохоос үл хамааран Лиу авсан хэсгүүдийнхээ уртуудын нийлбэрийг s -ээс багагүй байлгаж чаддаг байх s -ийн хамгийн их утгыг ол.



2026 оны 7 дугаар сарын 16 (Пүрэв).

Бодлого 4. Шан-Ю, Мулан хоёр тоглоом тоглож байв. $0^\circ < \theta < 180^\circ$ байх θ өнцгийг хоёулаа мэднэ. Эхлээд Шан-Ю цаасаар хүссэн хэлбэртэй $\mathcal{T}$ гурвалжин хийнэ. Үүний дараа дараах үйлдлүүдийг давтан хийнэ.

- $\mathcal{T}$ гурвалжны ядаж нэг өнцөг θ бол Мулан хожиж, тоглоом дуусна.
- Үгүй бол, Мулан $\mathcal{T}$ гурвалжны аль нэг тал дээр, оройнуудаас ялгаатай P цэг сонгоод $\mathcal{T}$ гурвалжнаа P цэгийг эсрэг оройтой нь холбосон хэрчмийн дагуу хайчилж хоёр гурвалжинд хуваана.
- Шан-Ю хоёр гурвалжны аль нэгийг сонгож хаяна. Үлдсэн гурвалжин нь шинэ $\mathcal{T}$ болно.

θ өнцгийн ямар бодит тоон утгуудад, Шан-Ю яаж тоглохоос үл хамааран, Мулан төгсгөлөг үйлдлээр хожиж чадах вэ?

Бодлого 5. Эерэг бодит тоон олонлогийг $\mathbb{R}_{>0}$ гэж тэмдэглэе. Дурын $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ тоонуудын хувьд

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)}$$

байдаг бүх $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ функцийг ол.

Бодлого 6. 1-ээс их натурал тоонуудаас тогтох $a_1, a_2, a_3, \dots$ төгсгөлгүй дараалал өгөгдөв. Дурын натурал n дугаарын хувьд a_{n+1} нь a_n -ээс их бөгөөд бүх $i = 1, 2, \dots, n$ хувьд $\gcd(a_{n+1}, a_i) > 1$ байдаг хамгийн бага натурал тоо байв.

T, L натурал тоонууд дурын натурал n тооны хувьд

$$a_{n+T} = a_n + L$$

байхаар олдохыг батал. (Энд x, y натурал тоонуудын хамгийн их ерөнхий хуваагчийг $\gcd(x, y)$ гэж тэмдэглэв.)