



srijeda, 15. jul 2026

Zadatak 1. Na tabli je napisano 2026 prirodnih brojeva većih od 1, pri čemu nisu obavezno različiti. U jednom potezu, Konfučije bira dva broja $m > 1$ i $n > 1$ sa različitih pozicija na tabli i zamjenjuje ova dva broja sa

$$\text{nzd}(m, n) \quad \text{i} \quad \frac{\text{nzs}(m, n)}{\text{nzd}(m, n)}.$$

Nastavlja da izvršava poteze sve dok je to moguće.

(a) Dokazati da, bez obzira na izbore koje Konfučije pravi, nakon konačno mnogo poteza će na tabli biti tačno jedan broj M koji je veći od 1.

(b) Dokazati da vrijednost broja M ne zavisi of izbora koje Konfučije pravi.

(Napomena: $\text{nzd}(x, y)$ označava najveći zajednički djelilac prirodnih brojeva x i y , i $\text{nzs}(x, y)$ označava najmanji zajednički sadržalac prirodnih brojeva x i y .)

Zadatak 2. Neka je ABC trougao i neka su tačke M i N središta stranica AB i AC , respektivno. Neka su tačke K i L izabrane tako da leže strogo unutar trouglova BMC i BNC , respektivno, tako da K leži strogo unutar trougla ABL i L leži strogo unutar trougla AKC . Pretpostavimo da važi

$$\angle KBA = \angle ACL, \quad \angle LBK = \angle LNC, \quad \text{i} \quad \angle LCK = \angle BMK.$$

Neka je O centar opisane kružnice trougla AKL . Dokazati da je $OM = ON$.

Zadatak 3. Neka je n prirodan broj. Liu Bang i Xiang Yu imaju štap dužine 1 koji žele da podijele. Liu označava najviše n tačaka na štapu, a zatim Xiang takođe označava najviše n tačaka na štapu. Sve označene tačke su različite. Dalje, štap se siječe u svim označenim tačkama, i dobija se određen broj dijelova. Nakon toga naizmjenično povlače poteze, i u svakom potezu uzimaju jedan od izrezanih dijelova štapa koji nije ranije uzet. Liu počinje igru. Cilj svakog igrača je da maksimizuje ukupnu dužinu dijelova štapa koje je uzeo.

Za svako n odrediti najveću vrijednost c takvu da ukupna dužina dijelova štapa koje je Liu uzeo može sigurno biti bar c , bez obzira kako Xiang igra.



četvrtak, 16. jul 2026.

Zadatak 4. Šan-Ju i Mulan igraju igru. Neka je θ ugao koji znaju oba igrača takav da $0^\circ < \theta < 180^\circ$. Na početku, Šan-Ju pravi papirni trougao $\mathcal{T}$ sa dimenzijama koje on želi. Nakon toga, ponavljaju sljedeće korake:

- Ako je bar jedan od uglova trougla $\mathcal{T}$ mjere tačno θ , igra se završava i Mulan pobjeđuje.
- U suprotnom, Mulan bira tačku P na jednoj od stranica trougla $\mathcal{T}$, različitu od tjemena trougla. Nakon toga ona pravi rez od tačke P do naspramnog tjemena trougla $\mathcal{T}$, i time dijeli $\mathcal{T}$ na dva trougla.
- Šan-Ju odbacuje jedan od ta dva novonastala trougla. Preostali trougao postaje novi trougao $\mathcal{T}$.

Za koje realne vrijednosti ugla θ Mulan može garantovati pobjedu u konačno mnogo koraka, bez obzira kako Šan-Ju igra?

Zadatak 5. Označimo sa $\mathbb{R}_{>0}$ skup pozitivnih realnih brojeva. Odrediti sve funkcije $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ takve da

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)}$$

za svako $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.

Zadatak 6. Neka je $a_1, a_2, a_3, \dots$ beskonačan niz prirodnih brojeva većih od 1. Pretpostavimo da za svaki prirodan broj n važi da je broj a_{n+1} najmanji prirodan broj veći od a_n takav da je $\text{nzd}(a_{n+1}, a_i) > 1$ za svako $i = 1, 2, \dots, n$. Dokazati da postoje prirodni brojevi T i L takvi da

$$a_{n+T} = a_n + L$$

za svaki prirodan broj n .

(Napomena: $\text{nzd}(x, y)$ označava najveći zajednički djelilac prirodnih brojeva x i y .)