



среда, 15. јули 2026

Задача 1. Има 2026 цели броеви поголеми од 1 запишани на табла, незадолжително различни. При секој потег, Конфучие избира два броја $m > 1$ и $n > 1$ од различни позиции на таблата и ги заменува овие два броја со

$$\gcd(m, n) \quad \text{и} \quad \frac{\text{lcm}(m, n)}{\gcd(m, n)}.$$

Продолжува да прави потези додека тоа е можно.

(a) Докажете дека, независно од изборите на Конфучие, после конечно многу потези, точно еден цел број M на таблата е поголем од 1.

(b) Докажете дека вредноста на M не зависи од изборите на Конфучие.

(Напоменуваме дека $\gcd(x, y)$ го означува најголемиот заеднички делител на позитивни цели броеви x и y , а $\text{lcm}(x, y)$ најмалиот заеднички содржател на x и y .)

Задача 2. Нека ABC е триаголник и нека M и N се средишните точки на страните AB и AC , соодветно. Точки K и L се избрани во триаголниците BMC и BNC , соодветно, така што K лежи во триаголникот ABL и L лежи во триаголникот AKC . Притоа,

$$\angle KBA = \angle ACL, \quad \angle LBK = \angle LNC, \quad \text{и} \quad \angle LCK = \angle BMK.$$

Нека O е центарот на опишаната кружница на триаголникот AKL . Докажете дека $OM = ON$.

Задача 3. Нека n е позитивен цел број. Вук и Јан сакаат дадена прачка со должина 1 да ја поделат меѓусебе. Вук означува најмногу n точки на прачката, а потоа Јан означува најмногу n точки на прачката. Означените точки се различни. Следно, прачката е пресечена кај сите означени точки, што резултира со неколку парчиња. Потоа, двајцата наизменично си присвојуваат по едно неприсвоено парче, започнувајќи со Вук. Цел на секој играч е да ја максимизира вкупната должина на своите парчиња. За секој n , одредете ја најголемата вредност c таква што Вук може да обезбеди за себе вкупна должина од барем c , независно од играњето на Јан.



четврток, 16. јули 2026

Задача 4. Шан-Ју и Мулан ја играат следнава игра. Нека θ е агол со $0^\circ < \theta < 180^\circ$ познат на двајцата играчи. Најпрво, Шан-Ју од хартија изработува триаголник $\mathcal{T}$ со мерки по негов избор. Потоа, тие повеќекратно ги извршуваат следниве чекори:

- Ако $\mathcal{T}$ има барем еден агол со големина точно θ , тогаш играта завршува и Мулан победува.
- Во спротивно, Мулан избира точка P на обиколката на $\mathcal{T}$, различна од темињата. Таа потоа прави праволиниски засек од P до спротивното теме на $\mathcal{T}$, разбивајќи го на два триаголника.
- Шан-Ју отфрла еден од тие два триаголника. Преостанатиот триаголник постанува новиот $\mathcal{T}$.

За кои реални вредности на θ Мулан може да обезбеди победа за себе во конечно многу чекори, независно од тоа како игра Шан-Ју?

Задача 5. Нека $\mathbb{R}_{>0}$ е множеството позитивни реални броеви. Одредете ги сите функции $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ такви што

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)}$$

за секои $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.

Задача 6. Нека $a_1, a_2, a_3, \dots$ е бесконечна низа од позитивни цели броеви поголеми од 1. Притоа за сите позитивни цели броеви n , бројот a_{n+1} е најмалиот цел број поголем од a_n таков што $\gcd(a_{n+1}, a_i) > 1$ за секој $i = 1, 2, \dots, n$. Докажете дека постојат позитивни цели броеви T и L такви што

$$a_{n+T} = a_n + L$$

за секој позитивен цел број n . (Напоменуваме дека $\gcd(x, y)$ го означува најголемиот заеднички делител на позитивни цели броеви x и y .)