



Mëttwoch, 15. Juli 2026

Problem 1. Et stinn 2026 ganz Zuelen, all strikt méi grouss wéi 1 awer net onbedéngt verschidden, un der Tafel. An engem Spillzuch wielt de Giancarlo zwou ganz Zuelen $m > 1$ an $n > 1$, déi op verschiddene Plazen un der Tafel stinn, an ersetzt se duerch

$$\text{pgcd}(m, n) \quad \text{an} \quad \frac{\text{ppcm}(m, n)}{\text{pgcd}(m, n)}.$$

Hie fiert viru mat sou Spillzich soulaang et méiglech ass.

- (a) Beweist datt, onofhängeg vun dem Giancarlo senge Choixen, no endlech ville Spillzich genee eng ganz Zuel M un der Tafel nach strikt méi grouss wéi 1 ass.
- (b) Beweist datt M net vum Giancarlo senge Choixen ofhänkt.

(De $\text{pgcd}(x, y)$ beschreift de *plus grand commun diviseur*, also de gréisste gemeinsamen Deeler vun den zwou strikt positive ganzen Zuelen x an y , an de $\text{ppcm}(x, y)$ beschreift de *plus petit commun multiple*, also de klengste gemeinsame Multiple vun x an y .)

Problem 2. Et ass (ABC) en Dräieck, an M an N sinn d'Mëttelpunkte vun de Säiten $[AB]$ respektiv $[AC]$. D'Punkte K an L si strikt bannent den Dräiecker (BMC) respektiv (BNC) gewielt, sou datt K strikt bannent dem Dräieck (ABL) leit, an L strikt bannent dem Dräieck (AKC) leit. Et ass zousätzlech

$$\widehat{KBA} = \widehat{ACL}, \quad \widehat{LBK} = \widehat{LNC} \quad \text{an} \quad \widehat{LCK} = \widehat{BMK}.$$

Et ass O den Zentrum vum Ëmkrees vum Dräieck (AKL) . Beweist datt $OM = ON$.

Problem 3. Et ass n eng strikt positiv ganz Zuel. Den Heng an de Jang hunn en dënne Bengel mat der Längt 1 a si wëllen en ënnert sech opdeelen. Den Heng markéiert héchstens n Punkten um Bengel, an da markéiert de Jang héchstens n Punkten um Bengel. Déi markéiert Punkte sinn all verschidden. Als nächst gëtt de Bengel bei alle markéierte Punkten duerchgeschnidden, wouduerch eng bestëmmt Unzuel Stécker entstinn. Duerno krogen den Heng an de Jang sech ofwiessend e Stéck, dat nach kee vun hinne virdru gekroopt huet, bis datt d'Stécker all ënnert hinnen opgedeelt sinn; den Heng fänkt heibäi un. Jiddfer Spiller versicht, d'Gesamtlängt vun all senge gekroopte Stécker ze maximiséieren.

Bestëmmt fir all n déi gréisste Valeur c , sou datt den Heng garantéiert Stécker mat enger Gesamtlängt vun c kroepe kann, egal wéi de Jang spillt.



Donneschdeg, 16. Juli 2026

Problem 4. De Shan-Yu an d'Mulan spillen e Spill. Et ass θ e Wénkel, mat $0^\circ < \theta < 180^\circ$, dee béid Spiller kennen. Fir unzufänke bastelt de Shan-Yu aus Papeier en Dräieck $\mathcal{T}$ mat Säitelängte sou wéi hie wëll. Duerno féieren déi zwee Spiller folgend Schrëtt ëmmer nees aus:

- Wann $\mathcal{T}$ mindestens ee Wénkel huet dee genoe θ moosst, ass d'Spill riwwer an d'Mulan gewënnt.
- Anerefalls wíelt d'Mulan e Punkt P um Bord vun $\mathcal{T}$, verschidde vun den dräi Eckpunkten. Hatt mécht dann e riichte Schnëtt vu P bis zum opposéierten Eckpunkt vun $\mathcal{T}$ a spléckt esou $\mathcal{T}$ an zwee Dräiecker.
- De Shan-Yu geheet ee vun den zwee sou entstanenen Dräiecker wech. Den Dräieck deen iwwreg bleift gëtt elo den neien Dräieck $\mathcal{T}$.

Fir wéi eng reell Valeure vun θ kann d'Mulan garantéiert an endlech ville Schrëtt gewannen, egal wéi de Shan-Yu spillt?

Problem 5. Et ass $\mathbb{R}_{>0}$ den Ensemble vun de strikt positive reellen Zuelen. Fannt all d'Funktione $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, sou datt

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)}$$

fir all $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.

Problem 6. Et ass $a_1, a_2, a_3, \dots$ eng onendlech Suite vu ganzen Zuele strikt méi grouss wéi 1. Dobäi ass fir all strikt positiv ganz Zuel n d'Zuel a_{n+1} déi klengste ganz Zuel strikt méi grouss wéi a_n , sou datt $\text{pgcd}(a_{n+1}, a_i) > 1$ fir all $i = 1, 2, \dots, n$. Beweist datt et strikt positiv ganz Zuelen T an L gëtt, sou datt

$$a_{n+T} = a_n + L$$

fir all strikt positiv Zuel n .

(De $\text{pgcd}(x, y)$ beschreift de *plus grand commun diviseur*, also de gréisste gemeinsamen Deeler vun den zwou strikt positive ganzen Zuelen x an y .)