



2026 m. liepos 15 d., trečiadienis

1 uždavinys. Lentoje užrašyti 2026 natūralieji skaičiai, didesni už 1; jie nebūtinai skirtingi. Konfucijus kiekvieno ėjimo metu nutrina du natūraliuosius skaičius $m > 1$ ir $n > 1$, užrašytus skirtingose lentos vietose, ir vietoj jų užrašo skaičius

$$\text{DBD}(m, n) \quad \text{ir} \quad \frac{\text{MBK}(m, n)}{\text{DBD}(m, n)}.$$

Jis atlieka ėjimus, kol tai įmanoma.

(a) Įrodykite: nepriklausomai nuo Konfucijaus pasirinkimų, lentoje po baigtinio ėjimų skaičiaus bus lygiai vienas natūralusis skaičius M , didesnis už 1.

(b) Įrodykite, kad šio skaičiaus M reikšmė nepriklauso nuo Konfucijaus pasirinkimų.

(Čia $\text{DBD}(x, y)$ žymi natūraliųjų skaičių x ir y didžiausią bendrąjį daliklį, o $\text{MBK}(x, y)$ – jų mažiausią bendrąjį kartotinį.)

2 uždavinys. Trikampio ABC kraštinėse AB ir AC atitinkamai pažymėti jų vidurio taškai M ir N . Trikampių BMC ir BNC viduje atitinkamai pažymėti tokie taškai K ir L , kad K yra trikampio ABL viduje, o L – trikampio AKC viduje. (Trikampio vidaus taškas negali būti jo kraštinėje.) Tarkime, kad

$$\angle KBA = \angle ACL, \quad \angle LBK = \angle LNC \quad \text{ir} \quad \angle LCK = \angle BMK.$$

Trikampio AKL apibrėžtinio apskritimo centras yra O . Įrodykite, kad $OM = ON$.

3 uždavinys. Duotas natūralusis skaičius n . Liu ir Čanas turi lazda, kurios ilgis yra 1 ir kurią jie nori pasidalyti tarpusavyje. Lazdoje Liu pažymi ne daugiau nei n taškų, tada Čanas – ne daugiau nei n taškų. Visi pažymėtieji taškai skirtingi. Lazda sukapoja į gabalus, kertant ties kiekvienu pažymėtuojų tašku. Tada Liu ir Čanas pakaitomis atlieka ėjimus: ima po vieną dar nepaimtą lazdos gabalą; pradedą Liu. Kiekvienas žaidėjas siekia, kad bendras jo paimtų gabalų ilgis būtų kuo didesnis.

Kiekvienam n nustatykite didžiausią skaičių c , su kuriuo Liu gali užsitikrinti, kad jo paimtų gabalų bendras ilgis būtų ne mažesnis nei c , kaip bežaistų Čanas.



2026 m. liepos 16 d., ketvirtadienis

4 uždavinys. Šanju ir Mulan žaidžia tokį žaidimą. Duotas kampo didumas θ , kur $0^\circ < \theta < 180^\circ$; jis žinomas abiem žaidėjams. Pradžioje Šanju iškerpa popierinį trikampį $\mathcal{T}$, pats pasirinkdamas jo matmenis. Tada iš eilės kartojami tokie veiksmai.

- Jei $\mathcal{T}$ turi bent vieną kampą, kurio didumas yra lygiai θ , tai žaidimas baigiamas, o Mulan laimi.
- Priešingu atveju Mulan pasirenka tašką P , priklausantį trikampio $\mathcal{T}$ kraštui, bet nesutampantį su jokia iš trijų trikampio $\mathcal{T}$ viršūnių. Tada ji perkerpa $\mathcal{T}$ į du trikampius tiesia linija, einančia iš P į priešingą trikampio $\mathcal{T}$ viršūnę.
- Šanju išmeta vieną iš dviejų gautųjų trikampių. Likęs trikampis tampa naujuoju $\mathcal{T}$.

Kurioms realiosioms θ reikšmėms Mulan gali užsitikrinti pergalę per baigtinį ėjimų skaičių nepriklausomai nuo to, kaip bežaistų Šanju?

5 uždavinys. Visų teigiamų realiųjų skaičių aibę žymima $\mathbb{R}_{>0}$. Nustatykite visas tokias funkcijas $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, kad

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)}$$

su visais $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.

6 uždavinys. Kiekvienas begalinės sekos $a_1, a_2, a_3, \dots$ narys yra natūralusis skaičius, didesnis už 1. Kiekvienam natūraliajam n skaičius a_{n+1} yra toks mažiausias natūralusis skaičius, didesnis nei a_n , kad $\text{DBD}(a_{n+1}, a_i) > 1$ su visais $i = 1, 2, \dots, n$. Įrodykite, kad egzistuoja tokie natūralieji skaičiai T ir L , kad

$$a_{n+T} = a_n + L$$

su visais natūraliaisiais n .

(Čia $\text{DBD}(x, y)$ žymi natūraliųjų skaičių x ir y didžiausią bendrąjį daliklį.)