



trešdiena, 15. jūlijs 2026

1. uzdevums. Sāukumā uz tāfeles ir uzrakstīti 2026 neobligāti dažādi naturāli skaitļi, kas visi ir lielāki par 1. Vienā gājienā Māris izvēlas patvaļīgus divus skaitļus $m > 1$ un $n > 1$ no pašlaik uz tāfeles uzrakstītiem skaitļiem, nodzēš tos, un to vietā uzraksta skaitļus

$$\text{LKD}(m, n) \quad \text{un} \quad \frac{\text{MKD}(m, n)}{\text{LKD}(m, n)}.$$

Viņš turpina veikt gājienus, kamēr tas ir iespējams.

(a) Pierādīt, ka neatkarīgi no Māra izvēlēm, pēc galīga gājienu skaita, uz tāfeles pēkšņi būs tikai viens skaitlis M , kas ir lielāks par 1.

(b) Pierādīt, ka skaitļa M vērtība nav atkarīga no Māra izvēlēm.

(Ar $\text{LKD}(x, y)$ apzīmē naturālu skaitļu x un y lielāko kopīgo dalītāju, un ar $\text{MKD}(x, y)$ apzīmē naturālu skaitļu x un y mazāko kopīgo dalāmo.)

2. uzdevums. Dots trijstūris ABC . Punkti M un N ir attiecīgi malu AB un AC viduspunkti. Punkti K un L izvēlēti attiecīgi trijstūru BMC un BNC iekšpusēs tā, ka punkts K atrodas trijstūra ABL iekšpusē, un punkts L atrodas trijstūra AKC iekšpusē. Pieņemsim, ka

$$\angle KBA = \angle ACL, \quad \angle LBK = \angle LNC, \quad \text{un} \quad \angle LCK = \angle BMK.$$

Punkts O ir trijstūra AKL apvilktais riņķa līnijas centrs. Pierādīt, ka $OM = ON$.

3. uzdevums. Dots naturāls skaitlis n . Liu Bangam un Xiang Yuam ir nūja ar garumu 1 un viņi grib sadalīt to savā starpā. Liu atzīmē ne vairāk kā n punktus uz nūjas, un pēc tam Xiang atzīmē ne vairāk kā n punktus uz nūjas. Visiem atzīmētiem punktiem jābūt dažādiem. Tad nūja ir sagriezta katrā atzīmētā punktā, radot vairākus nūjas gabalus. Pēc tam viņi pamīšus paņem sev pa vienam nūjas gabalam, kas vēl nebija paņemts. Liu sāk pirmajs. Spēlētāju mērķis ir, lai kopējais paņemto nūju gabalu garums būtu pēc iespējas lielāks.

Katram n noteikt lielāku vērtību c tādu, ka Liu var garantēt, ka sev paņemto gabalu garumu summa ir vismaz c neatkarīgi no tā, kā spēlē Xiang.



ceturtdiena, 16. jūlijs 2026

4. uzdevums. Milana un Kristīne spēlē spēli. Dots leņķis θ tāds, ka $0^\circ < \theta < 180^\circ$, kura vērtība ir zināma abiem spēlētājiem. Sākumā, Kristīne izveido papīra trijstūri $\mathcal{T}$ ar leņķiem pēc savas izvēles. Pēc tam viņi atkārtoti veic sekojošas darbības:

- Ja kaut viens no trijstūra $\mathcal{T}$ leņķiem ir vienāds ar θ , tad spēle beidzas un Milana uzvar.
- Citādi, Milana izvēlas punktu P uz trijstūra $\mathcal{T}$ perimetra, kas nesakrīt ne ar vienu no trijstūra virsotnēm. Pēc tam viņa sagriež trijstūri $\mathcal{T}$ pa taisni, kas savieno P ar tā pretējo virsonti, sadalot to divos trijstūros.
- Kristīne izmēt ārā vienu no diviem trijstūriem pēc savas izvēles. Atlikušais trijstūris kļūst par jauno $\mathcal{T}$.

Kādam leņķa θ vērtībām Milana var garantēti uzvarēt, veicot galīgu gājienu skaitu, neatkarīgi no tā, kā spēlē Kristīne?

5. uzdevums. Ar $\mathbb{R}_{>0}$ apzīmēsim pozitīvo reālo skaitļu kopu. Atrast visas funkcijas $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, kurām izpildās

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)}$$

visiem $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.

6. uzdevums. Dota bezgalīga naturālu skaitļu virkne $a_1, a_2, a_3, \dots$, kuras katrs loceklis ir lielāks par 1. Pieņemsim, ka katram naturālam skaitlim n , skaitlis a_{n+1} ir mazākais naturāls skaitlis, kas ir lielāks par a_n un $\text{LKD}(a_{n+1}, a_i) > 1$ visiem $i = 1, 2, \dots, n$. Pierādīt, ka eksistē naturāli skaitļi T un L tādi, ka

$$a_{n+T} = a_n + L$$

visiem naturāliem skaitļiem n .

(Ar $\text{LKD}(x, y)$ apzīmē naturālu skaitļu x un y lielāko kopīgo dalītāju.)