



수요일, 15. 7 월 2026

문제 1. 칠판에 2026 개의 1 보다 큰 용근수 (같을수도 있다) 들이 있다. 매번 영희는 칠판의 서로 다른곳에 씌여진 두개의 용근수 $m > 1$ 과 $n > 1$ 을 선택하고 그것들을

$$\gcd(m, n) \quad \text{와} \quad \frac{\text{lcm}(m, n)}{\gcd(m, n)}$$

으로 바꾼다. 영희는 이러한 조작을 가능한껏 계속 진행한다.

(1) 영희가 수들을 어떻게 선택하는가에 관계없이 유한번만에 칠판에서 1 보다 큰 용근수는 M 으로서 유일하게 존재한다는것을 증명하시오.

(2) M 의 값은 영희의 선택에는 의존하지 않는다는것을 증명하시오.

(정의 용근수 x 와 y 에 대하여 $\gcd(x, y)$ 는 그 두수의 최대공통약수를, $\text{lcm}(x, y)$ 는 최소공통배수를 의미한다.)

문제 2. 3 각형 ABC 에서 점 M 과 N 은 각각 변 AB 와 AC 의 가운데점이다. 점 K 와 L 은 각각 3 각형 BMC 와 BNC 의 내부 (경계를 포함하지 않는 구역) 에 놓이는 점으로서 K 는 3 각형 ABL 의 내부에, L 은 3 각형 AKC 의 내부에 놓인다. 이때

$$\angle KBA = \angle ACL, \quad \angle LBK = \angle LNC, \quad \angle LCK = \angle BMK.$$

이 선다고 하자. O 를 3 각형 AKL 의 외심이라고 할 때 $OM = ON$ 임을 증명하시오.

문제 3. n 은 정의 용근수이다. 영남이와 철이는 길이가 1 인 막대기 한개를 자기들끼리 나누어 가지려고 한다. 먼저 영남이가 막대기에 기껏 n 개의 점을 표시한 다음 철이가 막대기에 기껏 n 개의 점을 표시한다. 표시된 점들은 모두 서로 다르다. 다음 표시된 모든 점들에서 막대기를 잘라 토막들을 만든다. 이후에 그들은 서로 번갈아가며 남아있는 토막들에서 한토막씩 골라가지는데 영남이가 먼저 시작한다. 매 사람은 각각 자기가 가진 토막들의 길이의 합을 최대로 하려고 한다. 매 정의 용근수 n 에 대하여 다음 조건을 만족하는 c 의 최대값을 구하시오: 영남이는 철이가 어떻게 하는가에 관계없이 자기가 가진 토막들의 길이의 합이 항상 c 이상이 되도록 담보할수 있다.



목요일, 16. 7 월 2026

문제 4. 영남이와 순희가 유희를 한다. θ 는 $0^\circ < \theta < 180^\circ$ 로서 두명이 다 알고있는 각이다. 처음에 영남이가 종이를 자기가 바라는 임의의 크기의 3 각형 $\mathcal{T}$ 를 하나 만든다. 그다음 그들은 다음의 조작들을 반복한다:

- 만일 $\mathcal{T}$ 에 θ 와 똑같은 각이 적어도 한개 있으면 유희는 끝나며 순희가 이긴다.
- 그렇지 않으면 순희는 $\mathcal{T}$ 의 둘레에서 세 정점과는 다른 점 P 를 하나 선택하고 P 와 그의 맞은편정점을 지나는 직선을 따라 잘라 $\mathcal{T}$ 를 두개의 3 각형으로 가른다.
- 영남이는 그 두 3 각형들중 하나를 없앤다. 남은 3 각형이 새로운 $\mathcal{T}$ 로 된다.

실수 θ 의 어떤 값에 대하여 순희가 영남이의 조작에 관계없이 유한번의 조작후에 이기게 되는 방향을 가지는가?

문제 5. $\mathbb{R}_{>0}$ 은 정의 실수전부의 모임이다. 임의의 $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ 에 대하여

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)}$$

를 만족하는 함수 $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ 을 다 구하시오.

문제 6. $a_1, a_2, a_3, \dots$ 은 1 보다 큰 정의 용근수들의 무한렬이다. 모든 정의 용근수 n 에 대하여 a_{n+1} 은 a_n 보다 크면서 임의의 $i = 1, 2, \dots, n$ 에 대하여 $\gcd(a_{n+1}, a_i) > 1$ 를 만족하는 최소의 정의 용근수이다. 이때 정의 용근수 T 와 L 이 존재하여 모든 정의 용근수 n 에 대하여 $a_{n+T} = a_n + L$ 이 선다는것을 증명하시오.

($\gcd(x, y)$ 는 정의 용근수 x 와 y 의 최대공통약수를 의미한다.)