



2026 년 7 월 15 일 수요일

문제 1. 칠판에 2026 개의 1 보다 큰 정수들이 적혀있다. (적힌 수들이 모두 다를 필요는 없다.) 공자는 칠판에 적힌 수들 중 두 개의 수 $m > 1, n > 1$ 을 선택하여, 이 두 수를 지우고 다음 두 수로 바꾸어 적는다.

$$\gcd(m, n) \quad \text{그리고} \quad \frac{\text{lcm}(m, n)}{\gcd(m, n)}$$

공자는 이 작업을 할 수 있는 한 계속해서 반복한다.

(a) 공자가 어떻게 수를 선택하든지 상관없이 유한번의 작업 후에 결국 칠판에 적힌 수들 중 1 보다 큰 정수는 오직 한 개의 수 M 만이 존재하게 됨을 보여라.

(b) 공자가 어떻게 수를 선택하든지 상관없이 M 은 항상 일정한 값이 됨을 보여라.

(양의 정수 x, y 에 대하여 $\gcd(x, y)$ 는 x 와 y 의 최대공약수이고, $\text{lcm}(x, y)$ 는 x 와 y 의 최소공배수이다.)

문제 2. 삼각형 ABC 의 두 변 AB, AC 의 중점을 각각 M, N 이라 하자. 점 K, L 은 각각 삼각형 BMC, BNC 내부의 점으로, K 는 삼각형 ABL 내부에, L 은 삼각형 AKC 내부에 위치한다. (이 때 내부란, 경계를 포함하지 않는 영역이다.) 다음 조건들이 성립한다고 하자.

$$\angle KBA = \angle ACL, \quad \angle LBK = \angle LNC, \quad \angle LCK = \angle BMK.$$

삼각형 AKL 의 외심을 O 라 할 때, $OM = ON$ 임을 보여라.

문제 3. 유방과 항우는 길이가 1 인 가느다란 막대를 여러 개로 나누어 가지려고 한다. 주어진 양의 정수 n 에 대하여, 먼저 유방이 막대에 n 개 이하의 점을 찍고, 그 후 항우가 n 개 이하의 점을 찍는다. (찍은 점들은 모두 서로 다르다.) 그 후 모든 점에서 막대를 잘라 여러 조각들로 나눈다. 이제 유방부터 시작하여 둘이 번갈아 가며 아직 남아있는 막대 조각들 중 하나씩을 골라 가져 간다. 각자 자기가 가지게 되는 막대 조각들의 길이의 합을 최대 하려고 한다.

양의 정수 n 에 대하여, 항우가 어떻게 플레이하든지 상관없이 유방이 자기가 가진 막대 조각들의 길이의 합이 c 이상이 되도록 할 수 있는 가장 큰 c 의 값을 구하여라.



2026 년 7 월 16 일 목요일

문제 4. 산유와 물란이 게임을 한다. 이 게임은 $0^\circ < \theta < 180^\circ$ 인 각도 θ 에 대하여 진행되며, 이 값은 두 사람 모두에게 공개된다. 게임을 시작할 때, 산유가 먼저 본인이 원하는 크기의 삼각형 $\mathcal{T}$ 를 종이로 만든다. 그 후 다음과 같은 수행을 반복한다.

- 만약 $\mathcal{T}$ 의 세 각 중 한 각의 크기가 θ 이면, 게임은 종료되고 물란이 승리한다.
- 만약 그렇지 않으면, 물란은 $\mathcal{T}$ 의 한 변 위에 $\mathcal{T}$ 의 세 꼭짓점이 아닌 한 점 P 를 잡고, P 와 P 의 반대편 꼭짓점을 잇는 직선으로 삼각형 $\mathcal{T}$ 를 잘라 두 개의 삼각형을 만든다.
- 산유는 두 삼각형 중 하나를 선택하여 버리고, 남은 삼각형이 새로운 $\mathcal{T}$ 가 된다.

산유가 어떻게 플레이하든 상관없이, 물란이 유한번의 수행 안에 승리할 수 있는 θ 의 값을 모두 구하여라.

문제 5. 양의 실수 전체의 집합을 $\mathbb{R}_{>0}$ 이라 하자. 임의의 $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ 에 대하여 다음을 만족하는 함수 $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ 을 모두 구하여라.

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)}$$

문제 6. 1 보다 큰 양의 정수들로 이루어진 무한 수열 $a_1, a_2, a_3, \dots$ 이 있다. 임의의 양의 정수 n 에 대하여, a_{n+1} 은 a_n 보다 크면서 모든 $i = 1, 2, \dots, n$ 에 대하여 $\gcd(a_{n+1}, a_i) > 1$ 이 성립하는 정수들 중 가장 작은 수이다. 다음을 만족하는 양의 정수 T, L 이 존재함을 보여라.

임의의 양의 정수 n 에 대하여 $a_{n+T} = a_n + L$ 이다.

(양의 정수 x, y 에 대하여 $\gcd(x, y)$ 는 x 와 y 의 최대공약수이다.)