



mercoledì 15 luglio 2026

Problema 1. Su una lavagna sono scritti 2026 interi maggiori di 1, non necessariamente distinti. Una mossa di Confucio consiste nello scegliere due interi $m > 1$ ed $n > 1$ scritti in punti diversi della lavagna, cancellarli e scrivere sulla lavagna i numeri

$$\text{MCD}(m, n) \quad \text{e} \quad \frac{\text{mcm}(m, n)}{\text{MCD}(m, n)}.$$

Confucio continua a effettuare mosse finché può farlo.

- (a) Dimostrare che, qualunque siano le scelte di Confucio, dopo un numero finito di mosse vi sarà un unico intero M fra quelli scritti sulla lavagna che sia maggiore di 1.
- (b) Mostrare che il valore di M non dipende dalle decisioni di Confucio.

(Con $\text{MCD}(x, y)$ si intende il massimo comun divisore degli interi positivi x e y ; con $\text{mcm}(x, y)$ si intende il minimo comune multiplo di x e y .)

Problema 2. Dato un triangolo ABC , sia M il punto medio del lato AB e sia N il punto medio del lato AC . Si scelgano un punto K interno al triangolo BMC e un punto L interno al triangolo BNC in modo che K sia interno al triangolo ABL ed L interno al triangolo AKC . Si supponga inoltre che

$$\angle KBA = \angle ACL, \quad \angle LBK = \angle LNC \quad \text{e} \quad \angle LCK = \angle BMK.$$

Sia O il circocentro del triangolo AKL . Dimostrare che $OM = ON$.

Problema 3. Sia n un numero intero positivo. Daria e Luca hanno un grissino di lunghezza 1 che vogliono dividersi. Daria segna al più n punti lungo il grissino; successivamente, anche Luca segna al più n punti. I punti segnati devono essere tutti distinti. Il grissino viene poi spezzato nei punti segnati, suddividendolo in alcuni segmenti. A questo punto, Daria e Luca mangiano a turno un segmento ciascuno, a partire da Daria. Ognuno dei due contendenti ha l'obiettivo di massimizzare la lunghezza totale dei segmenti che mangerà.

Per ogni n , determinare il massimo valore c tale che Daria possa garantirsi di mangiare una lunghezza totale di almeno c , comunque agisca Luca.



giovedì 16 luglio 2026

Problema 4. Davide e Veronica si sfidano al seguente gioco. Sia θ un angolo strettamente compreso tra 0° e 180° , noto a entrambi i giocatori. Davide comincia ritagliando un triangolo di carta $\mathcal{T}$ di cui sceglie liberamente forma e dimensione. A quel punto, si svolgono ripetutamente i seguenti passi:

- se $\mathcal{T}$ ha almeno un angolo di ampiezza esattamente pari a θ , allora il gioco termina e Veronica risulta vincitrice.
- Altrimenti, Veronica sceglie un punto P sul bordo di $\mathcal{T}$ che non sia un vertice del triangolo. Taglia poi lungo il segmento che va da P al vertice opposto di $\mathcal{T}$, spezzando $\mathcal{T}$ in due triangoli.
- Davide scarta uno dei due triangoli a sua scelta e il gioco prosegue con il triangolo rimanente nel ruolo di $\mathcal{T}$.

Quali sono i valori reali di θ per i quali Veronica, comunque giochi Davide, può vincere in un numero finito di passi?

Problema 5. Sia $\mathbb{R}_{>0}$ l'insieme dei numeri reali positivi. Determinare tutte le funzioni $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ tali che

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)}$$

per ogni x, y in $\mathbb{R}_{>0}$.

Problema 6. Sia $a_1, a_2, a_3, \dots$ una sequenza infinita di interi maggiori di 1. Per ogni intero positivo n , il termine a_{n+1} è il minimo intero maggiore di a_n tale che $\text{MCD}(a_{n+1}, a_i) > 1$ per $i = 1, 2, \dots, n$. Dimostrare che esistono interi positivi T ed L tali che

$$a_{n+T} = a_n + L$$

per ogni intero positivo n .

(Con $\text{MCD}(x, y)$ si intende il massimo comun divisore degli interi positivi x e y .)