



Rabu, 15 Juli 2026

Soal 1. Terdapat 2026 bilangan bulat lebih besar dari 1 yang tidak mesti berbeda tertulis di papan. Dalam satu langkah, Confucius memilih dua bilangan bulat $m > 1$ dan $n > 1$ dari dua tempat yang berbeda pada papan dan menggantikan keduanya dengan

$$\gcd(m, n) \quad \text{dan} \quad \frac{\text{lcm}(m, n)}{\gcd(m, n)}.$$

Dia terus melakukan langkah tersebut selama ia bisa melakukannya.

- (a) Buktikan bahwa terlepas dari pilihan yang dibuat oleh Confucius, setelah berhingga banyaknya langkah, terdapat tepat satu bilangan M yang lebih besar dari 1 di papan.
 - (b) Buktikan bahwa nilai dari M tidak bergantung kepada pilihan yang dilakukan oleh Confucius.
- (Perhatikan bahwa $\gcd(x, y)$ menyatakan faktor persekutuan terbesar dari bilangan bulat positif x dan y , dan $\text{lcm}(x, y)$ menyatakan kelipatan persekutuan terkecil dari x dan y .)

Soal 2. Misalkan ABC sebuah segitiga dengan M dan N berturut-turut titik tengah AB dan AC . Misalkan titik K dipilih di dalam interior segitiga BMC dan titik L dipilih di dalam interior segitiga BNC , sehingga K terletak di dalam interior segitiga ABL dan L terletak di dalam interior segitiga AKC . Misalkan

$$\angle KBA = \angle ACL, \quad \angle LBK = \angle LNC, \quad \text{dan} \quad \angle LCK = \angle BMK.$$

Misalkan O adalah titik pusat lingkaran luar segitiga AKL . Buktikan bahwa $OM = ON$.

Soal 3. Misalkan n suatu bilangan bulat positif. Ujang dan Asep mempunyai tongkat dengan panjang 1 yang akan dipotong-potong dan kemudian dibagikan diantara mereka. Ujang membuat paling banyak n titik marka pada tongkat. Kemudian Asep membuat paling banyak n titik marka pada tongkat. Semua titik marka berada pada posisi berbeda. Setelah itu, tongkat dipotong pada semua titik marka, menghasilkan beberapa potongan tongkat. Lalu, Ujang dan Asep bergantian mengambil potongan yang belum terambil, diawali oleh Ujang terlebih dulu. Masing-masing pemain ingin memaksimalkan panjang total dari potongan-potongan yang mereka miliki.

Untuk setiap n , tentukan bilangan terbesar c sehingga Ujang dapat menjamin bahwa panjang total potongan yang dia miliki sedikitnya c , terlepas dari apa yang Asep lakukan.



Kamis, 16 Juli 2026

Soal 4. Shan-Yu dan Mulan bermain suatu *game*. Misalkan θ adalah suatu sudut dengan $0^\circ < \theta < 180^\circ$ yang nilainya diketahui oleh kedua pemain. Pertama, Shan-Yu membuat segitiga kertas $\mathcal{T}$ dengan ukuran yang dia pilih. Kemudian, mereka berulang-ulang melakukan langkah berikut:

- Jika $\mathcal{T}$ memiliki sedikitnya satu sudut dengan ukuran sama dengan θ , maka game berhenti dan Mulan menang.
- Jika tidak, Mulan memilih sebuah titik P pada keliling dari $\mathcal{T}$ yang bukan merupakan titik sudut. Mulan kemudian melakukan potongan lurus dari titik P ke titik sudut dari $\mathcal{T}$ yang berlawanan dengan P , menghasilkan dua buah segitiga.
- Shan-Yu membuang satu dari dua segitiga tersebut. Segitiga yang tersisa menjadi segitiga $\mathcal{T}$ yang baru.

Untuk nilai-nilai θ yang mana saja Mulan dapat menjamin dirinya menang dalam berhingga banyaknya langkah, terlepas dari permainan Shan-Yu?

Soal 5. Misalkan $\mathbb{R}_{>0}$ adalah himpunan semua bilangan real positif. Tentukan semua fungsi $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ sehingga

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)}$$

untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.

Soal 6. Misalkan $a_1, a_2, a_3, \dots$ merupakan barisan takhingga dari bilangan bulat positif lebih dari 1. Untuk setiap bilangan bulat positif n , misalkan a_{n+1} adalah bilangan bulat positif terkecil lebih dari a_n yang memenuhi $\gcd(a_{n+1}, a_i) > 1$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$. Buktikan bahwa terdapat bilangan bulat positif T dan L sehingga

$$a_{n+T} = a_n + L$$

untuk setiap bilangan bulat positif n .

(Perhatikan bahwa $\gcd(x, y)$ menyatakan faktor persekutuan terbesar dari x dan y .)