



miðvikudagur, 15. júlí 2026

Dæmi 1. 2026 ekki endilega ólíkar heiltölur stærri en 1 eru ritaðar á töflu. Í einni breytingu velur Konfúsíus tvær heiltölur $m > 1$ og $n > 1$ á ólíkum stöðum á töflunni og skiptir heiltölunum tveim út fyrir

$$\gcd(m, n) \quad \text{og} \quad \frac{\text{lcm}(m, n)}{\gcd(m, n)}.$$

Hann heldur áfram að framkvæma breytingar meðan hann getur.

(a) Sýnið að sama hvað Konfúsíus velur þá verður ein heiltala M stærri en 1 eftir á töflunni eftir endanlega margar breytingar.

(b) Sannið að gildi M er ekki háð því hvað Konfúsíus velur.

(Hér táknar $\gcd(x, y)$ stæsta samdeili jákvæðu heiltalnanna x og y og $\text{lcm}(x, y)$ minnsta samfeldi þeirra.)

Dæmi 2. Lát ABC vera þríhyrning og lát M og N vera miðpunkta hliðanna AB og AC . Punktar K og L eru valdir strangt innan þríhyrninganna BMC og BNC , þannig að K liggji strangt innan þríhyrningsins ABL og L liggji strangt innan þríhyrningsins AKC . Gerum ráð fyrir að

$$\angle KBA = \angle ACL, \quad \angle LBK = \angle LNC, \quad \text{og} \quad \angle LCK = \angle BMK.$$

Lát O vera ummiðju þríhyrningsins AKL . Sannið að $OM = ON$.

Dæmi 3. Lát n vera jákvæða heiltölu. Liu Bang og Xiang Yu eru með prik af lengd 1 og vilja skipta því milli sín. Liu merkir í mesta lagi n punkta á prikinu og svo merkir Xiang í mesta lagi n punkta á prikinu. Merktu punktarnir eru á ólíkum stöðum meðfram prikinu. Svo er prikinu klippt í sundur á öllum merktum punktum til að mynda smærri búta. Loks skiptast Liu og Xiang á að velja búi til að eigna sér, og Liu byrjar. Markmið hvers þeirra er að hámarka samtals lengd búta sinna. Fyrir hvert n , ákvarðið stærsta gildið c svo Liu geti verið viss um að samtals lengd búta hans er að minnsta kosti c , sama hvað Xiang gerir.



fimmtudagur, 16. júlí 2026

Dæmi 4. Sjan-Jú og Múlan eru að spila leik. Lát θ vera horn með $0^\circ < \theta < 180^\circ$, sem báðir leikmenn vita af. Upphaflega býr Sjan-Jú til þríhyrning $\mathcal{T}$ úr pappír, þar sem hann ræður lögun þríhyrningsins. Svo endurtaka leikmenn eftirfarandi skref:

- Ef að minnsta kosti eitt horn í $\mathcal{T}$ er θ lýkur leiknum og Múlan vinnur.
- Annars velur Múlan punkt P á jaðar $\mathcal{T}$, frábrugðnum hornpunktunum þrem. Hún klippir svo þríhyrninginn í tvennt meðfram strikinu frá P í andstæðan hornpunkt og myndar tvo nýja þríhyrninga.
- Sjan-Jú velur annan þríhyrninganna og hendir honum. Hinn þríhyrningurinn verður nýji þríhyrningurinn $\mathcal{T}$.

Fyrir hvaða rauntölugildi θ getur Múlan ávallt unnið eftir endanlega mörg skref, sama hvað Sjan-Jú gerir?

Dæmi 5. Lát $\mathbb{R}_{>0}$ vera mengi jákvæðra rauntalna. Ákvarðið öll föll $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ þannig að

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)}$$

fyrir öll $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.

Dæmi 6. Lát $a_1, a_2, a_3, \dots$ vera óendanlega runu jákvæðra heiltalna stærri en 1. Gerum ráð fyrir að fyrir allar jákvæðar heiltölur n sé a_{n+1} minnsta jákvæða heiltalan stærri en a_n þannig að $\gcd(a_{n+1}, a_i) > 1$ fyrir öll $i = 1, 2, \dots, n$. Sannið að til séu jákvæðar heiltölur T og L þannig að

$$a_{n+T} = a_n + L$$

fyrir allar jákvæðar heiltölur n .

(Hér táknar $\gcd(x, y)$ stæsta samdeili jákvæðu heiltalnanna x og y .)