



2026. július 15, szerda

1. feladat. Valaki felírt a táblára 2026, nem feltétlenül különböző, 1-nél nagyobb egész számot. Konfuciusz minden lépésben kiválaszt két egész számot, $m > 1$ -et és $n > 1$ -et két különböző helyről a táblán, és ezt a két számot kicseréli a

$$\gcd(m, n) \quad \text{és} \quad \frac{\text{lcm}(m, n)}{\gcd(m, n)}$$

számokra. Ezt a lépést addig ismétli, amíg csak lehetséges.

- (a) Bizonyítsuk be, hogy – függetlenül Konfuciusz választásaitól – véges sok lépés után pontosan egy olyan M egész szám marad a táblán, amely nagyobb 1-nél.
- (b) Bizonyítsuk be, hogy az M értéke nem függ Konfuciusz választásaitól.

(Megjegyzés: $\gcd(x, y)$ az x és y pozitív egész számok legnagyobb közös osztóját, $\text{lcm}(x, y)$ pedig az x és y legkisebb közös többszörösét jelöli.)

2. feladat. Legyen ABC egy háromszög, és legyen M és N az AB , illetve az AC oldal felezőpontja. Válasszuk meg a K és L pontokat a BMC , illetve a BNC háromszög belsejében úgy, hogy a K az ABL , az L pedig az AKC háromszög belsejébe essen. Tegyük fel, hogy

$$KBA \sphericalangle = ACL \sphericalangle, \quad LBK \sphericalangle = LNC \sphericalangle \quad \text{és} \quad LCK \sphericalangle = BMK \sphericalangle.$$

Legyen O az AKL háromszög köré írt kör középpontja. Bizonyítsuk be, hogy $OM = ON$.

3. feladat. Legyen n pozitív egész. Liu Bangnak és Csang Junak van egy 1 egység hosszú pálcája, amit fel akarnak osztani egymás között. Előbb Liu kijelöl legfeljebb n pontot a pálcán, utána Csang is kijelöl legfeljebb n pontot a pálcán. A megjelölt pontok különbözők. Ezután a pálcát elvágják minden megjelölt ponton, így néhány darabra esik szét. Ezek után felváltva kiválasztják maguknak a pálcák egy-egy tetszőleges olyan darabját, amit még senki sem választott; Liu választ először. Mindkét játékos célja az, hogy a magának kiválasztott darabok hosszának összege a lehető legnagyobb legyen.

Határozzuk meg minden egyes n -re a legnagyobb olyan c értéket, amelyre Liu biztosan elérheti, hogy a pálcák darabjainak összege legalább c legyen, függetlenül attól, hogyan játszik Csang.



2026. július 16, csütörtök

4. feladat. Sanyi and Mári játszik. Legyen $0^\circ < \theta < 180^\circ$ adott szög, amit mindkét játékos ismer. Kezdekör Sanyi papírból készít egy $\mathcal{T}$ háromszöget, amelynek méreteit ő választja meg. Ezután a következő lépést ismételtetik:

- Ha $\mathcal{T}$ -nek van legalább egy, pontosan θ nagyságú szöge, akkor a játék véget ér, és Mári nyer.
- Különben Mári választ a $\mathcal{T}$ területén egy, a három csúctól különböző P pontot. Ezután a $\mathcal{T}$ háromszöget a P -től a $\mathcal{T}$ szemközti csúcsáig egy egyenes vágással két háromszögre vágja szét.
- Sanyi eldobja az egyik háromszöget. A megmaradt háromszög lesz az új $\mathcal{T}$.

A θ mely valós értékei esetén tudja Mári biztosan megnyerni a játékot, bárhogyan is játszik Sanyi?

5. feladat. Legyen $\mathbb{R}_{>0}$ a pozitív valós számok halmaza. Határozzuk meg az összes olyan $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ függvényt, amelyre

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)}$$

teljesül minden $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ esetén.

6. feladat. Legyen $a_1, a_2, a_3, \dots$ egy 1-nél nagyobb pozitív egészekből álló végtelen sorozat. Tegyük fel, hogy minden pozitív egész n -re az a_{n+1} szám a legkisebb olyan, a_n -nél nagyobb pozitív egész, amelyre $\gcd(a_{n+1}, a_i) > 1$ minden $i = 1, 2, \dots, n$ esetén. Bizonyítsuk be, hogy léteznek olyan T és L pozitív egészek, amelyekre

$$a_{n+T} = a_n + L$$

teljesül minden pozitív egész n -re.

(Megjegyzés: $\gcd(x, y)$ a pozitív egész x és y számok legnagyobb közös osztóját jelöli.)