



srijeda, 15. srpnja 2026

Zadatak 1. Na ploči je napisano 2026 ne nužno različitih prirodnih brojeva većih od 1. U jednom potezu Konfucije bira dva broja $m > 1$ i $n > 1$ napisana na različitim mjestima na ploči i mijenja ta dva broja s

$$\text{nzd}(m, n) \quad \text{i} \quad \frac{\text{nzv}(m, n)}{\text{nzd}(m, n)}.$$

On nastavlja raditi ove poteze dok god je to moguće.

(a) Dokaži da, bez obzira na Konfucijeve izbore, nakon konačno mnogo poteza točno jedan broj M na ploči je veći od 1.

(b) Dokaži da vrijednost broja M ne ovisi o Konfucijevim izborima.

(Napomena: $\text{nzd}(x, y)$ označava najveći zajednički djelitelj prirodnih brojeva x i y , a $\text{nzv}(x, y)$ označava najmanji zajednički višekratnik prirodnih brojeva x i y .)

Zadatak 2. Neka je ABC trokut i neka su točke M i N polovišta stranica AB i AC , tim redom. Neka su točke K i L odabrane strogo unutar trokutova BMC i BNC , tim redom, takve da K leži strogo unutar trokuta ABL i L leži strogo unutar trokuta AKC . Pretpostavimo da vrijedi

$$\angle KBA = \angle ACL, \quad \angle LBK = \angle LNC \quad \text{i} \quad \angle LCK = \angle BMK.$$

Neka je O centar opisane kružnice trougla AKL . Dokaži da je $OM = ON$.

Zadatak 3. Neka je n prirodan broj. Liu Bang i Xiang Yu imaju štap duljine 1 i žele ga podijeliti među sobom. Liu označava najviše n točaka na štapu, a zatim Xiang također označava najviše n točaka na štapu. Sve označene točke su različite. Zatim se štap prereže na svim označenim točkama čime se dobije određen broj komada. Nakon toga oni naizmjenično uzimaju komade koji još nisu uzeti. Liu igra prvi. Svaki igrač želi maksimizirati ukupnu dužinu komada koje je uzeo.

Za svaki n odredi najveći realan broj c takav da Liu može sigurno postići ukupnu dužinu od barem c , bez obzira kako Xiang igra.



četvrtak, 16. srpnja 2026

Zadatak 4. Shan-Yu i Mulan igraju igru. Neka je θ kut za koji vrijedi $0^\circ < \theta < 180^\circ$ i čiju vrijednost znaju oba igrača. Na početku Shan-Yu pravi papirnati trokut $\mathcal{T}$ s dimenzijama po svom izboru. Zatim igrači ponavljaju sljedeće korake:

- Ako $\mathcal{T}$ ima barem jedan kut čija je mjera točno θ , igra završava i Mulan pobjeđuje.
- U suprotnom, Mulan bira točku P na jednoj od stranica trokuta $\mathcal{T}$, različitu od njegovih vrhova. Ona zatim reže trokut $\mathcal{T}$ po dužini koja spaja P s nasuprotnim vrhom trokuta $\mathcal{T}$, čime ga dijeli na dva trokuta.
- Shan-Yu odbacuje jedan od dva novonastala trokuta. Preostali trokut postaje novi $\mathcal{T}$.

Za koje realne vrijednosti θ Mulan može sigurno pobijediti u konačno mnogo koraka, bez obzira kako Shan-Yu igra?

Zadatak 5. Neka je $\mathbb{R}_{>0}$ skup pozitivnih realnih brojeva. Odredi sve funkcije $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ takve da je

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.

Zadatak 6. Neka je $a_1, a_2, a_3, \dots$ beskonačan niz prirodnih brojeva većih od 1. Pretpostavimo da je za sve prirodne brojeve n broj a_{n+1} najmanji prirodan broj veći od a_n takav da za sve $i = 1, 2, \dots, n$ vrijedi $\text{nzd}(a_{n+1}, a_i) > 1$. Dokaži da postoje prirodni brojevi T i L takvi da je

$$a_{n+T} = a_n + L$$

za sve prirodne brojeve n .

(Napomena: $\text{nzd}(x, y)$ označava najveći zajednički djelitelj prirodnih brojeva x i y .)