



Τετάρτη, 15. Ιουλίου 2026

Πρόβλημα 1. Σε έναν πίνακα είναι γραμμένοι 2026 ακέραιοι μεγαλύτεροι του 1, όχι απαραίτητα διαφορετικοί. Σε μια κίνηση, ο Κομπούκιος επιλέγει δύο ακραίους $m > 1$ και $n > 1$ από διαφορετικές θέσεις στον πίνακα και αντικαθιστά αυτούς τους δύο ακραίους με τους

$$\gcd(m, n) \quad \text{και} \quad \frac{\text{lcm}(m, n)}{\gcd(m, n)}.$$

Συνεχίσει να κάνει κινήσεις για όσο είναι δυνατό.

(a) Να αποδείξετε ότι, ανεξάρτητα από τις επιλογές του Κομπούκιου, μετά από πεπερασμένο πλήθος κινήσεων, ακριβώς ένας ακέραιος M στον πίνακα θα είναι μεγαλύτερος του 1.

(b) Να αποδείξετε ότι η τιμή του M είναι ανεξάρτητη από τις επιλογές του Κομπούκιου.

(Σημειώνουμε ότι το $\gcd(x, y)$ συμβολίζει τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των θετικών ακεραίων x και y , ενώ το $\text{lcm}(x, y)$ συμβολίζει το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των x και y .)

Πρόβλημα 2. Έστω τρίγωνο ABC και έστω M και N τα μέσα των πλευρών AB και AC , αντίστοιχα. Θεωρούμε σημεία K και L αυστηρά στο εσωτερικό των τριγώνων BMC και BNC , αντίστοιχα, τέτοια ώστε το K να βρίσκεται αυστηρά στο εσωτερικό του τριγώνου ABL και το L να βρίσκεται αυστηρά στο εσωτερικό του τριγώνου AKC . Υποθέτουμε ότι

$$\angle KBA = \angle ACL, \quad \angle LBK = \angle LNC \quad \text{και} \quad \angle LCK = \angle BMK.$$

Έστω O το περίκεντρο του τριγώνου AKL . Να αποδείξετε ότι $OM = ON$.

Πρόβλημα 3. Έστω θετικός ακέραιος n . Ο Λιου Μπανγκ και ο Σιανγκ Γιου έχουν ένα ραβδί μήκους 1 το οποίο θέλουν να μοιράσουν μεταξύ τους. Ο Λιου επιλέγει το πολύ n σημεία στο ραβδί και μετά ο Σιανγκ επιλέγει το πολύ n σημεία στο ραβδί. Όλα τα επιλεγμένα σημεία είναι διαφορετικά. Μετά, το ραβδί κόβεται στα επιλεγμένα σημεία, δημιουργώντας ορισμένα κομμάτια. Ακολουθώντας, με τον Λιου να ξεκινάει πρώτος, παίρνουν εναλλάξ οποιοδήποτε κομμάτι δεν έχει ήδη παρθεί. Στόχος κάθε παίκτη είναι να μεγιστοποιήσει το συνολικό μήκος των δικών του κομματιών.

Για κάθε τιμή του n , να προσδιορίσετε τη μέγιστη τιμή του c που είναι τέτοια ώστε ο Λιου να μπορεί να εγγυηθεί ότι το συνολικό μήκος των κομματιών του είναι τουλάχιστον c , ανεξαρτήτως του πως παίζει ο Σιανγκ.



Πέμπτη, 16. Ιουλίου 2026

Πρόβλημα 4. Ο Σαν Γιου και η Μουλάν παίζουν ένα παιχνίδι. Έστω θ μια γωνία, με $0^\circ < \theta < 180^\circ$, η οποία είναι γνωστή και στους δύο παίκτες. Αρχικά, ο Σαν Γιου κατασκευάζει ένα χάρτινο τρίγωνο $\mathcal{T}$ της επιλογής του. Μετά, εκτελούν επανειλημμένα το ακόλουθα βήματα:

- Αν το $\mathcal{T}$ έχει τουλάχιστον μία γωνία του ίση με θ , τότε το παιχνίδι τερματίζεται και κερδίζει η Μουλάν.
- Αλλιώς, η Μουλάν επιλέγει ένα σημείο P στην περίμετρο του $\mathcal{T}$, διαφορετικό από τις τρεις κορυφές. Στη συνέχεια κάνει μια ευθεία τομή από το P προς την απέναντι κορυφή του $\mathcal{T}$, χωρίζοντάς το σε δύο τρίγωνα.
- Ο Σαν Γιου απορρίπτει το ένα από τα δύο τρίγωνα. Το τρίγωνο που παραμένει γίνεται το καινούργιο τρίγωνο $\mathcal{T}$.

Για ποιες πραγματικές τιμές του θ , μπορεί η Μουλάν σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων να εγγυηθεί τη νίκη της, ανεξαρτήτως του πως παίζει ο Σαν Γιου;

Πρόβλημα 5. Έστω $\mathbb{R}_{>0}$ το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών. Να προσδιορίσετε όλες τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ που είναι τέτοιες ώστε

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.

Πρόβλημα 6. Έστω $a_1, a_2, a_3, \dots$ μια άπειρη ακολουθία θετικών ακεραίων μεγαλύτερων του 1. Υποθέτουμε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n , ο αριθμός a_{n+1} είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος που είναι μεγαλύτερος από τον a_n και είναι τέτοιος ώστε $\gcd(a_{n+1}, a_i) > 1$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν θετικοί ακέραιοι T και L που είναι τέτοιοι ώστε

$$a_{n+T} = a_n + L$$

για κάθε θετικό ακέραιο n .

(Σημειώνουμε ότι το $\gcd(x, y)$ συμβολίζει τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των θετικών ακεραίων x και y .)