



יום רביעי, 15 ביולי 2026

שאלה 1. על הלוח כתובים 2026 מספרים שלמים גדולים מ-1, לא בהכרח שונים זה מזה. בכל מהלך קהלת בוחר שני מספרים $m > 1$ ו- $n > 1$ הכתובים במקומות שונים על הלוח ומחליף אותם במספרים

$$\gcd(m, n) \quad , \quad \frac{\text{lcm}(m, n)}{\gcd(m, n)}$$

הוא ממשיך לבצע מהלכים כל עוד הוא יכול.

(א) הוכיחו כי אחרי מספר סופי של מהלכים בדיוק מספר אחד M הכתוב על הלוח יהיה גדול מ-1, בלי תלות בבחירות של קהלת.

(ב) הוכיחו כי הערך של M לא תלוי בבחירות של קהלת.

כאן $\gcd(x, y)$ מסמן את המחלק המשותף המקסימלי של השלמים החיוביים x ו- y , ו- $\text{lcm}(x, y)$ מסמן את הכפולה המשותפת המינימלית שלהם.

שאלה 2. במשולש ABC נסמן ב- M וב- N את אמצעי הצלעות AB ו- AC , בהתאמה. נסמן נקודות K ו- L בפנים המשולשים BMC ו- BNC , בהתאמה, עבורן K נמצאת בפנים המשולש ABL ו- L נמצאת בפנים המשולש AKC . נתון כי מתקיים

$$\angle KBA = \angle ACL \quad , \quad \angle LBK = \angle LNC \quad , \quad \angle LCK = \angle BMK$$

נסמן ב- O את מרכז המעגל החוסם של משולש AKL . הוכיחו כי $OM = ON$.

שאלה 3. יהא n שלם חיובי. דוד ושאל רוצים לחלק ביניהם מקל באורך 1. דוד מסמן על המקל לכל היותר n נקודות, ואחר כך שאל מסמן על המקל לכל היותר n נקודות. כל הנקודות המסומנות שונות זו מזו. לאחר מכן הם שוברים את המקל בכל הנקודות המסומנות, ונוצרות מספר חתיכות. בשלב הבא הם בוחרים ולוקחים בתורות את חתיכות המקל הפנויות, אחת אחת, כשדוד בוחר ראשון. המטרה של כל אחד מהשחקנים היא לצבור אורך כולל גדול ככל האפשר של חתיכות מקל.

לכל n , מצאו את הערך הגדול ביותר האפשרי של c עבורו דוד יכול להבטיח לעצמו אורך כולל לפחות c , בלי תלות בבחירות של שאל.



יום חמישי, 16 ביולי 2026

שאלה 4. רעמסס ומשה משחקים משחק. נתונה זווית $0^\circ < \theta < 180^\circ$ הידועה לשני השחקנים. ראשית, רעמסס יוצר משולש פפירוס $\mathcal{T}$ עם מידות לבחירתו. לאחר מכן, הם מבצעים את הפעולות הבאות שוב ושוב:

- אם לפחות אחת מהזוויות של $\mathcal{T}$ שווה בגודלה ל- θ , המשחק נגמר ומשה מנצח.
 - אחרת, משה בוחר נקודה P על היקף המשולש $\mathcal{T}$ שאינה אחת משלושת הקודקודים שלו, וקורע את המשולש לשניים לאורך קו ישר מ- P לקודקוד הנגדי לו ב- $\mathcal{T}$.
 - רעמסס זורק את אחד משני המשולשים. המשולש הנותר נהיה ה- $\mathcal{T}$ החדש.
- עבור אילו ערכים ממשיים של θ יכול משה להבטיח את ניצחונו לאחר מספר סופי של מהלכים, בלי תלות במהלכים של רעמסס?

שאלה 5. נסמן ב- $\mathbb{R}_{>0}$ את קבוצת המספרים הממשיים החיוביים. מצאו את כל הפונקציות $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ עבורן מתקיים

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)}$$

לכל $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.

שאלה 6. תהא $a_1, a_2, a_3, \dots$ סדרה אינסופית של שלמים גדולים מ-1. נניח שלכל n שלם חיובי, המספר a_{n+1} הוא השלם הקטן ביותר המקיים $a_{n+1} > a_n$ וגם $\gcd(a_{n+1}, a_i) > 1$ לכל $i = 1, 2, \dots, n$. הוכיחו שקיימים שלמים חיוביים T ו- L עבורם

$$a_{n+T} = a_n + L$$

לכל n שלם חיובי.

(כאן $\gcd(x, y)$ מסמן את המחלק המשותף המקסימלי של השלמים החיוביים x ו- y .)