



Mittwoch, 15. Juli 2026

Aufgabe 1. Auf einer Tafel stehen 2026 (nicht notwendigerweise verschiedene) ganze Zahlen, die größer als 1 sind. Ein Zug besteht darin, dass Konfuzius zwei Zahlen $m > 1$ und $n > 1$ wählt, die an verschiedenen Stellen auf der Tafel stehen, und diese durch

$$\text{ggT}(m, n) \quad \text{und} \quad \frac{\text{kgV}(m, n)}{\text{ggT}(m, n)}$$

ersetzt. Solange es möglich ist, führt er Züge aus.

(a) Man beweise, dass nach endlich vielen Zügen genau eine Zahl M auf der Tafel steht, die größer als 1 ist, unabhängig von der Wahl von Konfuzius' Zügen.

(b) Man beweise, dass M nicht davon abhängt, wie Konfuzius seine Züge wählt.

(Dabei bezeichnet $\text{ggT}(x, y)$ den größten gemeinsamen Teiler der positiven ganzen Zahlen x und y sowie $\text{kgV}(x, y)$ das kleinste gemeinsame Vielfache von x und y .)

Aufgabe 2. Sei ABC ein Dreieck und seien M und N die Mittelpunkte der Seiten AB bzw. AC . Die Punkte K und L seien so im Inneren der Dreiecke BMC bzw. BNC gewählt, dass K im Inneren des Dreiecks ABL sowie L im Inneren des Dreiecks AKC liegt. Außerdem gelte

$$\angle KBA = \angle ACL, \quad \angle LBK = \angle LNC \quad \text{und} \quad \angle LCK = \angle BMK.$$

Sei O der Umkreismittelpunkt des Dreiecks AKL .

Man zeige, dass $OM = ON$.

Aufgabe 3. Sei n eine positive ganze Zahl. Liu Bang und Xiang Yu möchten einen Stab der Länge 1 untereinander aufteilen. Liu markiert höchstens n Punkte auf dem Stab. Danach markiert Xiang höchstens n Punkte auf dem Stab. Dabei müssen die markierten Punkte paarweise verschieden sein. Nun wird der Stab an den markierten Punkten zerschnitten, wodurch er in Stücke zerteilt wird. Anschließend nehmen die beiden abwechselnd jeweils ein Stück, wobei Liu beginnt. Dabei möchte jeder Spieler die Gesamtlänge seiner Stücke maximieren.

Für jedes n bestimme man das größte c , sodass Liu garantiert eine Gesamtlänge von mindestens c erreichen kann, unabhängig davon, wie Xiang spielt.



Donnerstag, 16. Juli 2026

Aufgabe 4. Shan-Yu und Mulan spielen ein Spiel. Sei ϑ ein Winkel mit $0^\circ < \vartheta < 180^\circ$, der beiden bekannt ist. Zu Beginn fertigt Shan-Yu ein Papierdreieck $\mathcal{T}$ mit Abmessungen seiner Wahl an. Danach führen die beiden wiederholt die folgenden Schritte aus:

- Falls $\mathcal{T}$ mindestens einen Innenwinkel der Größe ϑ hat, endet das Spiel und Mulan gewinnt.
- Andernfalls wählt Mulan einen Punkt P auf dem Rand von $\mathcal{T}$, der von den drei Eckpunkten verschieden ist. Danach zerschneidet sie das Dreieck durch einen geraden Schnitt von P zum gegenüberliegenden Eckpunkt von $\mathcal{T}$ in zwei Teildreiecke.
- Shan-Yu entfernt eines der beiden Teildreiecke. Das andere Teildreieck wird das neue $\mathcal{T}$.

Für welche reellen ϑ kann Mulan garantiert in endlich vielen Schritten gewinnen, unabhängig davon, wie Shan-Yu spielt?

Aufgabe 5. Es bezeichne $\mathbb{R}_{>0}$ die Menge der positiven reellen Zahlen. Man bestimme alle Funktionen $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, sodass

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt.

Aufgabe 6. Sei $a_1, a_2, a_3, \dots$ eine unendliche Folge ganzer Zahlen größer als 1. Für alle positiven ganzen Zahlen n sei dabei a_{n+1} die kleinste ganze Zahl größer als a_n mit $\text{ggT}(a_{n+1}, a_i) > 1$ für alle $i = 1, 2, \dots, n$.

Man zeige, dass es positive ganze Zahlen T und L gibt, die

$$a_{n+T} = a_n + L$$

für alle positiven ganzen Zahlen n erfüllen.

(Dabei bezeichnet $\text{ggT}(x, y)$ den größten gemeinsamen Teiler der positiven ganzen Zahlen x und y .)