



ოთხშაბათი, 15. ივლისი 2026

ამოცანა 1. დაფაზე წერია 2026 ცალი არა აუცილებლად ერთმანეთისაგან განსხვავებული მთელი რიცხვი, რომელთაგან თითოეული მეტია 1-ზე. ერთ სვლაზე კონფუცი ირჩევს ორ მთელ $m > 1$ და $n > 1$ რიცხვს, რომლებიც დაფის სხვადასხვა ადგილას წერია, შლის მათ და წერს ისევ ორ რიცხვს

$$\gcd(m, n) \quad \text{და} \quad \frac{\text{lcm}(m, n)}{\gcd(m, n)}.$$

ის აგრძელებს სვლებს მანამ, სანამ შეუძლია.

(a) დაამტკიცეთ, რომ მიუხედავად იმისა თუ რა რიცხვებს აირჩევს კონფუცი, სასრული რაოდენობა სვლების შემდეგ დაფაზე იქნება ზუსტად ერთი მთელი რიცხვი M , რომელიც მეტია 1-ზე.

(b) დაამტკიცეთ, რომ M ის მნიშვნელობა დამოკიდებული არაა იმაზე, თუ რა რიცხვებს აირჩევს კონფუცი.

($\gcd(x, y)$ აღნიშნავს x და y მთელი დადებითი რიცხვების უდიდეს საერთო გამყოფს, ხოლო $\text{lcm}(x, y)$ აღნიშნავს x და y -ის უმცირეს საერთო ჯერადს.)

ამოცანა 2. მოცემულია სამკუთხედი ABC . ვთქვათ M და N შესაბამისად AB და AC გვერდების შუანერტილებია. ვთქვათ K და L შესაბამისად BMC და BNC სამკუთხედების ისეთი შიგა წერტილებია, რომ K არის ABL სამკუთხედის შიგა წერტილი და L არის AKC სამკუთხედის შიგა წერტილი. ვთქვათ

$$\angle KBA = \angle ACL, \quad \angle LBK = \angle LNC, \quad \text{და} \quad \angle LCK = \angle BMK.$$

ვთქვათ O არის AKL სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი. დაამტკიცეთ, რომ $OM = ON$.

ამოცანა 3. მოცემულია მთელი დადებითი რიცხვი n და ხის ჯოხი, რომლის სიგრძეა 1. ანომ და ვანომ ჯოხის დაჭრის შედეგად მიღებული ნაჭრები ერთმანეთში უნდა გაინაწილონ. ჯერ ანომ უნდა მონიშნოს ჯოხზე არაუმეტეს n წერტილი. შემდეგ ვანომ უნდა მონიშნოს ჯოხზე არაუმეტეს n წერტილი. ყველა მონიშნული წერტილი ერთმანეთისაგან განსხვავებული უნდა იყოს. ამის შემდეგ ჯოხი უნდა გაიჭრას ყველა მონიშნულ წერტილზე, რის შედეგადაც მიღებული ჯოხის ყველა ნაჭერი ანომ და ვანომ ერთმანეთში უნდა გაინაწილონ. მიღებულ ნაჭრებს ანო და ვანო რიგ-რიგობით იღებენ ჯერ არ აღებული ნაჭრებიდან, ყოველ ჯერზე თითო ნაჭერს. აღებას იწყებს ანო. თითოეულის მიზანია, რომ ყველა იმ ნაჭრის სიგრძეთა ჯამი, რომელიც მან აიღო რაც შეიძლება დიდი იყოს.

ყოველი n -თვის განსაზღვრეთ c -ს უდიდესი მნიშვნელობა ისეთი, რომ ანოს გარანტირებულად შეუძლია მის მიერ აღებული ყველა ნაჭრის სიგრძეთა ჯამი იყოს არანაკლებ c , მიუხედავად იმისა თუ როგორ იმოქმედებს ვანო.



ხუთშაბათი, 16. ივლისი 2026

ამოცანა 4. ანო და ვანო თამაშობენ შემდეგ თამაშს. მოცემულია კუთხე $0^\circ < \theta < 180^\circ$, რომლის სიდიდე ორივე მოთამაშისთვის ცნობილია. თავიდან ანო ქალაქიდან ამოჭრის ისეთი ფორმის სამკუთხედ $\mathcal{T}$ -ს, რაც მას სურს. შემდეგ მოთამაშეები რიგ-რიგობით ასრულებენ შემდეგ სვლებს:

- თუ $\mathcal{T}$ -ს აქვს ერთი კუთხე მაინც, რომლის სიდიდე ზუსტად არის θ , მაშინ თამაში მთავრდება ვანოს გამარჯვებით.
- წინააღმდეგ შემთხვევაში ვანო ირჩევს P წერტილს $\mathcal{T}$ -ს პერიმეტრზე, რომელიც განსხვავებულია $\mathcal{T}$ -ს სამივე წვეროსგან და ჭრის $\mathcal{T}$ სამკუთხედს იმ სწორი ხაზის გასწვრივ, რომელიც აერთებს P წერტილს მის მოპირდაპირედ მდებარე $\mathcal{T}$ -ს წვეროსთან.
- შემდეგ ანო მიღებული ორი სამკუთხედიდან ერთ-ერთს აგდებს, რის შედეგადაც დარჩენილი სამკუთხედი ხდება ახალი $\mathcal{T}$.

იპოვეთ θ -ს ყველა მნიშვნელობა ისეთი, რომ ვანოს გარანტირებულად შეუძლია მოგება სასრული რაოდენობა სვლის შემდეგ, მიუხედავად იმისა თუ როგორ ითამაშებს ანო?

ამოცანა 5. ვთქვათ $\mathbb{R}_{>0}$ არის ყველა ნამდვილ დადებით რიცხვთა სიმრავლე. განსაზღვრეთ ყველა ფუნქცია $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ ისეთი, რომ

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)}$$

ყოველი $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.

ამოცანა 6. ვთქვათ $a_1, a_2, a_3, \dots$ მთელ რიცხვთა უსასრულო მიმდევრობაა, რომლის თითოეული წევრი მეტია 1-ზე. ვთქვათ ყოველი მთელი დადებითი n -თვის, რიცხვი a_{n+1} არის უმცირესი მთელი რიცხვი, რომელიც მეტია a_n -ზე ისეთი, რომ $\gcd(a_{n+1}, a_i) > 1$ ყოველი $i = 1, 2, \dots, n$. დაამტკიცეთ, რომ არსებობს მთელი დადებითი რიცხვები T და L ისეთი, რომ

$$a_{n+T} = a_n + L$$

ყოველი მთელი დადებითი n -თვის.

($\gcd(x, y)$ აღნიშნავს x და y მთელი დადებითი რიცხვების უდიდეს საერთო გამყოფს.)