



mercredi 15 juillet 2026

Problème 1. Au tableau sont écrits 2026 entiers, qui sont tous strictement plus grands que 1 et non nécessairement deux à deux distincts. Chaque minute, Confucius effectue un mouvement : il choisit deux nombres entiers $m > 1$ et $n > 1$ écrits à des endroits différents du tableau, et remplace ces deux nombres entiers par

$$\text{pgcd}(m, n) \quad \text{et} \quad \frac{\text{ppcm}(m, n)}{\text{pgcd}(m, n)}.$$

Confucius continue tant qu'il est possible de faire un tel mouvement.

- (a) Démontrer que, peu importe les choix de Confucius, à un moment, un seul des entiers écrits au tableau, noté M , est strictement plus grand que 1.
- (b) Démontrer que la valeur de M ne dépend pas des choix de Confucius.

(Si x et y sont des entiers strictement positifs, $\text{pgcd}(x, y)$ désigne leur plus grand commun diviseur, et $\text{ppcm}(x, y)$ leur plus petit commun multiple.)

Problème 2. Soit ABC un triangle. On note M et N les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AC]$. Soient K et L des points strictement à l'intérieur des triangles BMC et BNC respectivement, tels que K est strictement à l'intérieur du triangle ABL et L est strictement à l'intérieur du triangle AKC . On suppose que les égalités d'angles suivantes sont vérifiées :

$$\widehat{KBA} = \widehat{ACL}, \quad \widehat{LBK} = \widehat{LNC}, \quad \text{et} \quad \widehat{LCK} = \widehat{BMK}.$$

Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle AKL . Démontrer que $OM = ON$.

Problème 3. Soit n un entier strictement positif. Liu Bang et Xiang Yu ont un bâton de longueur 1 et veulent le diviser en morceaux pour le partager entre eux. Liu marque au plus n points sur le bâton, et ensuite Xiang marque au plus n points sur le bâton. Les points marqués doivent être deux à deux distincts. Ils coupent alors le bâton à chaque point marqué, ce qui crée un certain nombre de morceaux du bâton initial. Ensuite, chacun son tour en commençant par Liu, la personne dont c'est le tour choisit un morceau du bâton qui n'a pas été encore choisi. Le but de chacun est de maximiser la somme totale des longueurs des morceaux qu'il a choisis.

Pour tout n , déterminer la plus grande valeur c pour laquelle Liu peut s'assurer d'avoir une somme des longueurs valant au moins c quels que soient les choix de Xiang.



jeudi 16 juillet 2026

Problème 4. Shan-Yu et Mulan jouent à un jeu. Soit θ un réel vérifiant $0 < \theta < 180$, qui est connu des deux joueurs. Au début, Shan-Yu fabrique un triangle de papier $\mathcal{T}$ non dégénéré de la forme qu'il souhaite. Ensuite, chaque minute, Shan-Yu et Mulan font les mouvements suivants :

- Si $\mathcal{T}$ a au moins un angle mesurant exactement θ degrés, le jeu s'arrête et Mulan gagne.
- Si ce n'est pas le cas, Mulan choisit un point P sur l'un des côtés de $\mathcal{T}$, différent des trois sommets de $\mathcal{T}$. Ensuite, elle découpe le triangle de manière rectiligne entre P et le sommet opposé à P dans $\mathcal{T}$, ce qui forme deux triangles de papier.
- Shan-Yu jette un des deux triangles. Le triangle restant devient le nouveau triangle $\mathcal{T}$.

Pour quelles valeurs du nombre réel θ Mulan peut-elle, en temps fini, s'assurer de gagner quelle que soit la manière dont Shan-Yu joue ?

Problème 5. On note $\mathbb{R}_{>0}$ l'ensemble des réels strictement positifs. Déterminer toutes les fonctions $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ telles que

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)}$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.

Problème 6. Soit $a_1, a_2, a_3, \dots$ une suite d'entiers dont tous les termes sont strictement plus grands que 1. On suppose que pour tout entier strictement positif n , le nombre a_{n+1} est le plus petit entier strictement plus grand que a_n tel que $\text{pgcd}(a_{n+1}, a_i) > 1$ pour tout $i = 1, 2, \dots, n$. Démontrer qu'il existe des entiers strictement positifs T et L tels que

$$a_{n+T} = a_n + L$$

pour tout entier strictement positif n .

(Si x et y sont des entiers strictement positifs, $\text{pgcd}(x, y)$ désigne leur plus grand commun diviseur.)