



keskiviikko, 15. heinäkuuta 2026

Tehtävä 1. Liitutaululle on kirjoitettu 2026 lukua 1 suurempaa kokonaislukua. (On mahdollista, että sama luku on kirjoitettu taululle useasti.) Siirron aikana Kungfutse valitsee liitutaulun eri sijoilta kokonaisluvut $m > 1$ ja $n > 1$, ja vaihtaa näiden sijoille luvut

$$\text{syt}(m, n) \quad \text{ja} \quad \frac{\text{pyj}(m, n)}{\text{syt}(m, n)}.$$

Hän toteuttaa siirtoja toistuvasti, kunhan tämä on mahdollista.

(a) Todista, että riippumatta Kungfutsen valinnoista, äärellisen määrän siirtoja kuluttua liitutaululla on täsmälleen yksi ykköstä suurempi kokonaisluku, M .

(b) Todista, että luvun M arvo ei riipu Kungfutsen tekemistä valinnoista.

(Huomioi, että $\text{syt}(x, y)$ merkitsee positiivisten kokonaislukujen x ja y suurinta yhteistä tekijää, ja $\text{pyj}(x, y)$ merkitsee lukujen x ja y pienintä yhteistä jakajaa.)

Tehtävä 2. Olkoon ABC kolmio, M janan AB keskipiste ja N janan AC keskipiste. Kolmion BMC sisältä valitaan piste K , joka ei ole kolmion BMC reunalla. Lisäksi K on kolmion ABL sisällä, mutta ei reunalla. Kolmion BNC sisältä valitaan piste L , joka ei ole kolmion BNC reunalla. Lisäksi L on kolmion AKC sisällä, mutta ei reunalla. Oletetaan, että

$$\angle KBA = \angle ACL, \quad \angle LBK = \angle LNC, \quad \text{ja} \quad \angle LCK = \angle BMK.$$

Olkoon O kolmion AKL ympäri piirretyn ympyrän keskipiste. Todista, että $OM = ON$.

Tehtävä 3. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Liu Bang ja Xiang Yu tahtovat jakaa keskenään kepin, jonka mitta on 1. Liu merkitsee enintään n kohtaa kepillä, ja sitten Xiang merkitsee enintään n kohtaa kepillä. Merkityt kohdat poikkeavat toisistaan. Keppi katkaistaan jokaisesta merkitystä kohdasta, ja jäljelle jää jokin lukumäärä pätkiä. Tämän jälkeen he nappaavat vuorotellen aiemmin nappaamattomia pätkiä. Liu nappaa ensin. Kummankin pelaajan tavoitteena on maksimoida pätkiensä yhteenlaskettu mitta.

Kaikilla n , määritä suurin luvun c arvo, jolla Liu voi taata, että hänen pätkiensä yhteenlaskettu mitta on vähintään c riippumatta Xiangin tekemistä valinnoista.



torstai, 16. heinäkuuta 2026

Tehtävä 4. Shan-Yu ja Mulan pelaavat peliä. Olkoon θ kummankin pelaajan tiedossa oleva kulma siten, että $0^\circ < \theta < 180^\circ$. Aluksi Shan-Yu askartelee paperista kolmion $\mathcal{T}$ hänen tahtojensa mukaisine mittoineen. Tämän jälkeen pelaajat toteuttavat toistuvasti seuraavia siirtoja:

- Jos mikään kolmion $\mathcal{T}$ kulmien suuruuksista on täsmälleen θ , niin peli loppuu ja Mulan voittaa.
- Muulloin Mulan valitsee kolmion $\mathcal{T}$ piiriltä pisteen P , joka ei ole mikään kolmion kärjistä. Tämän jälkeen hän leikkaa kolmion $\mathcal{T}$ kahteen kolmioon suoralla viillolla pisteestä P pisteen P vastapäätä olevaan kärkeen.
- Shan-Yu karsii jommankumman näin muodostuneista kolmioista. Jäljelle jäänyt kolmio tulee kolmion $\mathcal{T}$ tilalle.

Millä reaalisilla kulman θ arvoilla Mulan voi taata voittavansa äärellisen määrän siirtoja kuluttua riippumatta Shan-Yun valinnoista?

Tehtävä 5. Olkoon $\mathbb{R}_{>0}$ positiivisten kokonaislukujen joukko. Määritä kaikki funktiot $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, joilla pätee

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)}$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.

Tehtävä 6. Olkoon $a_1, a_2, a_3, \dots$ ääretön jono, joka koostuu lukua 1 suuremmista kokonaisluvuista. Oletetaan, että kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n luku a_{n+1} on pienin lukua a_n suurempi positiivinen kokonaisluku siten, että $\text{sy}(a_{n+1}, a_i) > 1$ kaikilla $i = 1, 2, \dots, n$. Todista, että on olemassa positiiviset kokonaisluvut T ja L siten, että

$$a_{n+T} = a_n + L$$

kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n .

(Huomioi, että $\text{sy}(x, y)$ merkitsee positiivisten kokonaislukujen x and y suurinta yhteistä tekijää.)