



kolmapäev, 15. juuli 2026

Ülesanne 1. Tahvlile on kirjutatud 2026 mitte tingimata erinevat täisarvu, mis on suuremad kui 1. Ühel käigul valib Konfutsius tahvli kahest erinevast kohast kaks täisarvu $m > 1$ ja $n > 1$ ning asendab need arvudega

$$\text{SÜT}(m, n) \quad \text{ja} \quad \frac{\text{VÜK}(m, n)}{\text{SÜT}(m, n)}.$$

Ta jätkab käikude tegemist kuni see on võimalik.

(a) Tõesta, et sõltumata Konfutsiuse valikutest jääb lõpliku arvu käikude järel tahvlile täpselt üks täisarv M , mis on suurem kui 1.

(b) Tõesta, et M väärtus ei sõltu Konfutsiuse valikutest.

(Siin $\text{SÜT}(x, y)$ tähistab positiivsete täisarvude x ja y suurimat ühistegurit ning $\text{VÜK}(x, y)$ tähistab x ja y vähimat ühiskordset.)

Ülesanne 2. Olgu ABC kolmnurk ning olgu M ja N vastavalt külgede AB ja AC keskpunktid. Punktid K ja L valitakse rangelt vastavalt kolmnurkade BMC ja BNC sees selliselt, et K asub rangelt kolmnurga ABL sees ja L asub rangelt kolmnurga AKC sees. Eeldame, et

$$\angle KBA = \angle ACL, \quad \angle LBK = \angle LNC \quad \text{ja} \quad \angle LCK = \angle BMK.$$

Olgu O kolmnurga AKL ümberringjoone keskpunkt. Tõesta, et $OM = ON$.

Ülesanne 3. Olgu n positiivne täisarv. Birgitil ja Alekseil on pulk pikkusega 1 ja nad tahavad jagada seda omavahel. Birgit märgib pulgale ülimalt n punkti, seejärel märgib Aleksei pulgale ülimalt n punkti. Kõik märgitud punktid on erinevad. Siis lõigatakse pulk kõigist märgitud punktidest tükke. Seejärel hakkavad nad võtma endale ühekaupa pulga tükke, alustab Birgit. Kummagi mängija eesmärk on maksimeerida tema võetud tükgede kogupikkust.

Iga n jaoks leia suurim c , mille korral saab Birgit kindlustada endale kogupikkuse vähemalt c sõltumata Aleksei vastumängust.



neljapäev, 16. juuli 2026

Ülesanne 4. Shan-Yu ja Mulan mängivad mängu. Nurk θ , mida teavad mõlemad mängijad, rahuldab tingimust $0^\circ < \theta < 180^\circ$. Algul valmistab Shan-Yu paberist kolmnurga $\mathcal{T}$ enda valitud mõõtmetega. Seejärel teevad nad korduvalt järgmisi samme:

- Kui kolmnurga $\mathcal{T}$ vähemalt üks nurkadest on suurusega θ , siis mäng lõpeb ja Mulan võidab.
- Muul juhul valib Mulan kolmnurga $\mathcal{T}$ mingil küljel punkti P , mis erineb kolmnurga tipust. Ta teeb sirge lõike punktist P kolmnurga $\mathcal{T}$ vastastippu, jagades selle kaheks kolmnurgaks.
- Shan-Yu viskab minema ühe kahest kolmnurgast. Allesjäävast kolmnurgast saab uus $\mathcal{T}$.

Milliste θ reaalarvuliste väärtuste korral saab Mulan garanteeritult võita lõpliku arvu sammude järel sõltumata Shan-Yu vastumängust?

Ülesanne 5. Olgu $\mathbb{R}_{>0}$ positiivsete reaalarvude hulk. Leia kõik funktsioonid $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, mis rahuldavad tingimust

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)}$$

kõigi $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ korral.

Ülesanne 6. Olgu $a_1, a_2, a_3, \dots$ ühest suuremate naturaalarvude lõpmatu jada. Iga positiivse täisarvu n jaoks olgu arv a_{n+1} vähim selline naturaalarv, mis on suurem kui a_n , et $\text{SÜT}(a_{n+1}, a_i) > 1$ iga $i = 1, 2, \dots, n$ korral. Tõesta, et leiduvad sellised positiivsed täisarvud T ja L , et kõigi positiivsete täisarvude n korral kehtib

$$a_{n+T} = a_n + L.$$

(Siin $\text{SÜT}(x, y)$ tähistab positiivsete täisarvude x ja y suurimat ühistegurit.)