



woensdag, 15 juli 2026

Opgave 1. Er staan 2026 (niet-noodzakelijk verschillende) gehele getallen (strikt) groter dan 1 op een schoolbord. In elke zet kiest Confucius twee gehele getallen $m > 1$ en $n > 1$ van verschillende plekken op het schoolbord en vervangt deze twee gehele getallen door

$$\text{ggd}(m, n) \quad \text{en} \quad \frac{\text{kgv}(m, n)}{\text{ggd}(m, n)}.$$

Hij gaat door met zetten doen zolang dat mogelijk is.

- (a) Bewijs dat, onafhankelijk van de keuzes van Confucius, na eindig veel zetten precies één geheel getal M op het schoolbord (strikt) groter is dan 1.
- (b) Bewijs dat de waarde van M niet afhangt van de keuzes van Confucius.

(Hierbij staat $\text{ggd}(x, y)$ voor de grootste gemene deler van de (strikt) positieve gehele getallen x en y , en $\text{kgv}(x, y)$ voor het kleinste gemene veelvoud van x en y .)

Opgave 2. Zij $\triangle ABC$ een driehoek en laat de punten M en N de middens zijn van respectievelijk de zijden AB en AC . Laat punten K en L gegeven zijn in het inwendige van respectievelijk $\triangle BMC$ en $\triangle BNC$, zodanig dat K in het inwendige van $\triangle ABL$ ligt en L in het inwendige van $\triangle AKC$ ligt. Veronderstel dat

$$\angle KBA = \angle ACL, \quad \angle LBK = \angle LNC \quad \text{en} \quad \angle LCK = \angle BMK.$$

Zij O het middelpunt van de omschreven cirkel van $\triangle AKL$. Bewijs dat $|OM| = |ON|$.

Opgave 3. Zij n een (strikt) positief geheel getal. Liu Bang en Xiang Yu hebben een stok van lengte 1 en willen die onder elkaar opdelen. Liu markeert ten hoogste n punten op de stok, en daarna markeert Xiang ten hoogste n punten op de stok. De gemarkeerde punten zijn allemaal verschillend. Daarna wordt de stok doorgezaagd bij alle gemarkeerde punten, waardoor allemaal losse stukjes ontstaan. Naderhand pakken ze om de beurt zo'n los stukje, waarbij Liu begint. Het doel van elke speler is om de totale lengte van zijn eigen losse stukjes te maximaliseren.

Bepaal voor elke n de grootste waarde c zodanig dat Liu een totale lengte van ten minste c kan garanderen, onafhankelijk van wat Xiang doet.



donderdag, 16 juli 2026

Opgave 4. Shan-Yu en Mulan spelen een spel. Zij θ een hoek met $0^\circ < \theta < 180^\circ$, die beide spelers kennen. In het begin maakt Shan-Yu een driehoek $\mathcal{T}$ van papier met afmetingen naar zijn keuze. Daarna zetten ze herhaaldelijk de volgende stappen:

- Als $\mathcal{T}$ op zijn minst één hoek van grootte precies θ heeft, dan stopt het spel en wint Mulan.
- Zo niet, dan kiest Mulan een punt P op de omtrek van $\mathcal{T}$, verschillend van de drie hoekpunten. Ze snijdt de driehoek dan door langs een rechte lijn van P naar het tegenoverliggende hoekpunt van $\mathcal{T}$, zodat er twee driehoeken ontstaan.
- Shan-Yu gooit één van de twee driehoeken weg. De overgebleven driehoek wordt de nieuwe $\mathcal{T}$.

Voor welke reële waarden van θ kan Mulan haar overwinning garanderen in eindig veel stappen, onafhankelijk van hoe Shan-Yu speelt?

Opgave 5. Zij $\mathbb{R}_{>0}$ de verzameling van (strikt) positieve reële getallen. Bepaal alle functies $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ zodanig dat voor alle $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ het volgende geldt:

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)}.$$

Opgave 6. Zij $a_1, a_2, a_3, \dots$ een oneindige rij gehele getallen (strikt) groter dan 1. Veronderstel dat voor alle (strikt) positieve gehele getallen n het volgende geldt: het getal a_{n+1} is het kleinste gehele getal (strikt) groter dan a_n zodanig dat $\text{ggd}(a_{n+1}, a_i) > 1$ voor alle $i = 1, 2, \dots, n$. Bewijs dat er (strikt) positieve gehele getallen T en L bestaan zodanig dat

$$a_{n+T} = a_n + L$$

voor alle (strikt) positieve gehele getallen n .

(Hierbij staat $\text{ggd}(x, y)$ voor de grootste gemene deler van de (strikt) positieve gehele getallen x en y .)