



onsdag, 15. juli 2026

Opgave 1. På en tavle står der skrevet 2026 (ikke nødvendigvis forskellige) heltal større end 1. I et træk vælger Georg to heltal $m > 1$ og $n > 1$ fra forskellige steder på tavlen og erstatter dem med heltallene

$$\text{sfd}(m, n) \quad \text{og} \quad \frac{\text{mfm}(m, n)}{\text{sfd}(m, n)}.$$

Georg bliver ved med at lave træk så længe det er muligt.

(a) Bevis at efter et endeligt antal træk er der netop ét heltal M større end 1 på tavlen, uafhængigt af Georgs valg.

(b) Bevis at værdien af M ikke afhænger af Georgs valg.

(Bemærk at $\text{sfd}(x, y)$ og $\text{mfm}(x, y)$ betegner henholdsvis den største fælles divisor og det mindste fælles multiplum af de positive heltal x og y .)

Opgave 2. Lad ABC være en trekant og lad henholdsvis M og N være midtpunkterne af siderne AB og AC . Punkterne K og L er valgt henholdsvis strengt inde i trekant BMC og trekant BNC , sådan at K ligger strengt inde i trekant ABL og L ligger strengt inde i trekant AKC . Antag at

$$\angle KBA = \angle ACL, \quad \angle LBK = \angle LNC, \quad \text{og} \quad \angle LCK = \angle BMK.$$

Lad O være centrum for den omskrevne cirkel til trekant AKL . Bevis at $|OM| = |ON|$.

Opgave 3. Lad n være et positivt heltal. Georg og Georgs mor har en pind af længde 1 som de gerne vil dele mellem sig. Georg markerer højst n punkter på pinden, og dernæst markerer Georgs mor højst n punkter på pinden. De markerede punkter er alle forskellige. Dernæst bliver pinden skåret over i de markerede punkter, og stykkerne af pinden placeres i en bunke. Georg og Georgs mor tager skiftevis stykker fra bunken, og Georg starter. Deres mål er at maximere den totale længde de stykker som de hver især har valgt.

For ethvert positivt heltal n , bestem den største værdi c sådan at Georg kan garantere en total længde på mindst c , uafhængigt af hvordan Georgs mor spiller.



torsdag, 16. juli 2026

Opgave 4. Georg og Georgs mor spiller et spil. Lad θ være en vinkel sådan at $0^\circ < \theta < 180^\circ$, og som begge spillere kender. Til at starte med laver Georg en papirtrekant $\mathcal{T}$ efter eget ønske. Dernæst udfører de følgende træk:

- Hvis $\mathcal{T}$ har en vinkel på præcis θ grader, så stopper spillet og Georgs mor vinder.
- Ellers vælger Georgs mor et punkt P på periferien af $\mathcal{T}$, som er forskellig fra trekantens sider. Hun klipper trekanten over langs linjen der forbinder P og det modstående hjørne af $\mathcal{T}$, hvilket giver to trekanter.
- Georg smider én af disse trekanter ud. Den trekant der er tilbage bliver den nye trekant $\mathcal{T}$.

For hvilke værdier af θ kan Georgs mor garantere at vinde indenfor endelig mange træk, uafhængigt af hvordan Georg spiller.

Opgave 5. Lad $\mathbb{R}_{>0}$ være mængden af positive reelle tal. Bestem alle funktioner $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ som opfylder, at

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)}$$

for alle $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.

Opgave 6. Let $a_1, a_2, a_3, \dots$ være en uendelig følge af positive heltal større end 1. Antag, at der gælder for alle positive heltal n , at a_{n+1} er det mindste positive heltal større end a_n som opfylder at $\text{sfd}(a_{n+1}, a_i) > 1$ for $i = 1, 2, \dots, n$. Bevis at der findes positive heltal T og L sådan at

$$a_{n+T} = a_n + L$$

for alle positive heltal n .

(Bemærk at $\text{sfd}(x, y)$ betegner den største fælles divisor af de positive heltal x og y .)