



středa, 15. července 2026

Úloha 1. Na tabuli je napsáno 2026 ne nutně různých celých čísel větších než 1. V jednom kroku si Konfucius z různých pozic na tabuli vybere dvě celá čísla $m > 1$ a $n > 1$ a tato dvě čísla nahradí čísla

$$D(m, n) \quad \text{a} \quad \frac{n(m, n)}{D(m, n)}.$$

Konfucius libovolně provádí kroky, dokud je to možné.

- (a) Dokažte, že bez ohledu na své výběry Konfucius po konečně mnoha krocích uvidí na tabuli jediné celé číslo M větší než 1.
- (b) Dokažte, že hodnota čísla M není závislá na Konfuciových výběrech.

(Symbol $D(x, y)$, resp. $n(x, y)$ značí největší společný dělitel, resp. nejmenší společný násobek kladných celých čísel x, y .)

Úloha 2. V trojúhelníku ABC označme M, N postupně středy stran AB, AC . Zvolme bod K , resp. L uvnitř trojúhelníku BMC , resp. BNC (nikoliv na jejich hranici) tak, že K leží uvnitř trojúhelníku ABL a L leží uvnitř trojúhelníku AKC (nikoliv na jejich hranici). Předpokládejme, že

$$|\angle KBA| = |\angle ACL|, \quad |\angle LBK| = |\angle LNC| \quad \text{a} \quad |\angle LCK| = |\angle BMK|.$$

Označme O střed kružnice opsané trojúhelníku AKL . Dokažte, že $|OM| = |ON|$.

Úloha 3. Je dáno kladné celé číslo n . Liu Bang a Xiang Yu si mezi sebe chtějí rozdělit tyčku délky 1. Nejdříve Liu vyznačí nejvýše n bodů na tyčce a poté Xiang vyznačí nejvýše n bodů na tyčce. Vyznačené body jsou navzájem různé. Tyčka se po rozřezání ve vyznačených bodech rozpadne na několik kousků. Na závěr si Liu a Xiang střídavě vybírají dosud nevybrané kousky tyčky, přičemž Liu začíná. Cílem každého hráče je maximalizovat součet délek svých kousků.

Pro každé n určete největší hodnotu c , pro kterou Liu může zaručit, že pro sebe vybere kousky se součtem délek alespoň c nezávisle na tom, co udělá Xiang.



čtvrtek, 16. července 2026

Úloha 4. Shan-Yu a Mulan hrají hru. Úhel θ splňující $0^\circ < \theta < 180^\circ$ je známý oběma hráčům. Nejdříve Shan-Yu vystřihne z papíru trojúhelník $\mathcal{T}$ podle své volby. Poté se opakovaně provádějí následující kroky:

- Pokud alespoň jeden z úhlů trojúhelníku $\mathcal{T}$ má velikost θ , hra končí a Mulan je vítězkou.
- V opačném případě si Mulan vybere libovolný bod P na obvodu trojúhelníku $\mathcal{T}$ kromě jeho tří vrcholů. Rovným stříhem z bodu P do protilehlého vrcholu trojúhelníku $\mathcal{T}$ získá dva trojúhelníky.
- Shan-Yu jeden z těchto dvou trojúhelníků vyřadí. Zbývající trojúhelník se stane novým trojúhelníkem $\mathcal{T}$.

Pro jaké reálné hodnoty θ si může Mulan zajistit vítězství v konečně mnoha krocích nezávisle na tom, jak bude Shan-Yu hrát?

Úloha 5. Označme $\mathbb{R}^+$ množinu kladných reálných čísel. Najděte všechny funkce $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ splňující

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)}$$

pro každá $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Úloha 6. Necht $a_1, a_2, a_3, \dots$ je nekonečná posloupnost kladných celých čísel větších než 1. Předpokládejme, že pro každé kladné celé číslo n je člen a_{n+1} nejmenší kladné celé číslo větší než a_n takové, že $D(a_{n+1}, a_i) > 1$ pro každé $i = 1, 2, \dots, n$. Dokažte, že existují kladná celá čísla T a L taková, že

$$a_{n+T} = a_n + L$$

pro každé kladné celé číslo n .

(Symbol $D(x, y)$ značí největší společný dělitel kladných celých čísel x, y .)