



星期三, 15. 七月 2026

問題 1. 黑板上有 2026 個大於 1 的正整數，它們之間不必然相異。在每一次操作中，孔子從黑板上不同的位置選取兩個整數 $m > 1$ 及 $n > 1$ ，並把它們換成

$$\gcd(m, n) \quad \text{及} \quad \frac{\text{lcm}(m, n)}{\gcd(m, n)}.$$

只要可行，孔子將持續執行這項操作。

(a) 試證：無論孔子如何選擇，在有限次操作後，黑板上恰有一個整數 M 比 1 大。

(b) 試證：上題中的 M 值不依孔子的選擇而改變。

(註：對正整數 x, y ， $\gcd(x, y)$ 為它們的最大公因數， $\text{lcm}(x, y)$ 為它們的最小公倍數。)

問題 2. 在三角形 ABC 中，點 M, N 分別為邊 AB, AC 的中點。在三角形 BMC 、三角形 BNC 的內部（皆不含邊界）分別選取點 K 與 L ，使得 K 嚴格落在三角形 ABL 的內部、 L 嚴格落在三角形 AKC 的內部。已知

$$\angle KBA = \angle ACL, \quad \angle LBK = \angle LNC, \quad \text{以及} \quad \angle LCK = \angle BMK.$$

令點 O 為三角形 AKL 的外心。試證： $OM = ON$ 。

問題 3. 設 n 為正整數。有一根長度為 1 的木條，劉邦和項羽要分這根木條。在木條上，劉邦先標上至多 n 個點，項羽再標上至多 n 個點；這些點皆不相同。在這些點的位置將木條切開，變成一些小木條。接下來從劉邦開始，兩人輪流拿走一根小木條。兩人的目標皆為最大化拿到的小木條長度總和。

對每一個 n ，試決定最大的 c 值，使得無論項羽如何進行，劉邦都可以拿到長度總和至少為 c 的小木條。



星期四, 16. 七月 2026

問題 4. 單于與木蘭進行一個遊戲。兩人都知道一個角度值 θ ，其中 $0^\circ < \theta < 180^\circ$ 。單于一開始先準備一個紙片三角形 $\mathcal{T}$ ，角度由他選擇。接下來兩人重複進行以下操作：

- 若 $\mathcal{T}$ 有至少一內角角度為 θ ，遊戲立即中止，並宣告木蘭獲勝。
- 否則，木蘭從 $\mathcal{T}$ 的三邊上選一點 P ， P 不為三角形的頂點。木蘭接著用 P 與對面的頂點連線作一刀切，將 $\mathcal{T}$ 分割成兩個三角形。
- 單于丟掉兩個三角形的其中一個，留下的三角形作為新的 $\mathcal{T}$ 。

試問：對哪些實數值 θ ，使得無論單于如何行動，木蘭總有有限次操作的必勝策略？

問題 5. 設 $\mathbb{R}_{>0}$ 為正實數所成的集合。試找出所有函數 $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ 使得

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)}$$

對每一組 $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ 皆成立。

問題 6. 設 $a_1, a_2, a_3, \dots$ 是由正整數組成的無窮數列，其中每一項都比 1 大。已知對所有正整數 n ， a_{n+1} 是大於 a_n 的正整數中，滿足 $\gcd(a_{n+1}, a_i) > 1$ 對每一個正整數 $i = 1, 2, \dots, n$ 都成立的最小者。試證：存在正整數 T 與 L ，使得

$$a_{n+T} = a_n + L$$

對每個正整數 n 皆成立。

(註： $\gcd(x, y)$ 為正整數 x, y 的最大公因數。)