



星期三, 15. 七月 2026

**第 1 题.** 黑板上写有 2026 个大于 1 的整数, 允许有相同的数。在一次操作中, 孔夫子选取黑板上两个不同位置的整数  $m > 1$  和  $n > 1$ , 并将这两个整数替换成

$$\gcd(m, n) \quad \text{和} \quad \frac{\text{lcm}(m, n)}{\gcd(m, n)}.$$

只要能够进行这样的操作他便继续操作。

(1) 证明: 不论孔夫子如何选择, 在有限次操作后, 黑板上恰有一个大于 1 的整数, 记此数为  $M$ 。

(2) 证明: 整数  $M$  的值不依赖于孔夫子的选择。

(注:  $\gcd(x, y)$  表示正整数  $x$  和  $y$  的最大公约数,  $\text{lcm}(x, y)$  表示  $x$  和  $y$  的最小公倍数。)

**第 2 题.** 在三角形  $ABC$  中, 点  $M$  和  $N$  分别是边  $AB$  和  $AC$  的中点。在三角形  $BMC$  和三角形  $BNC$  的内部分别选取点  $K$  和  $L$ , 使得点  $K$  在三角形  $ABL$  的内部, 点  $L$  在三角形  $AKC$  的内部。已知

$$\angle KBA = \angle ACL, \quad \angle LBK = \angle LNC, \quad \text{且} \quad \angle LCK = \angle BMK.$$

设  $O$  是三角形  $AKL$  的外心。证明:  $OM = ON$ 。

**第 3 题.** 设  $n$  是正整数。刘邦和项羽有一根长度为 1 的细棍, 他们按下述方式进行分配。刘邦先在细棍上标记不超过  $n$  个点, 接着项羽再标记不超过  $n$  个点。标记的点是互不相同的。随后在所有标记点处将细棍切开, 这样细棍被分成了若干个小段。在此之后, 他们轮流选取一个未被选取的小段, 由刘邦先选, 直至全部选完。每个人的目标均是使得自己选取的小段的总长度尽可能大。

对每个  $n$ , 求最大的  $c$ , 使得无论项羽如何操作, 刘邦总能确保自己选取的小段的总长度不小于  $c$ 。



星期四, 16. 七月 2026

**第 4 题.** 单于和木兰玩一个游戏。取定一个双方都知道的角度  $\theta$ ,  $0^\circ < \theta < 180^\circ$ 。游戏开始时, 单于在纸上剪出一个三角形  $\mathcal{T}$ , 内角大小由其任选。接着他们反复进行下面的步骤:

- 若三角形  $\mathcal{T}$  至少有一个内角的大小等于  $\theta$ , 则游戏结束, 木兰获胜。
- 否则, 木兰在  $\mathcal{T}$  的边界上选取一个点  $P$  (不是  $\mathcal{T}$  的顶点), 再沿点  $P$  与  $\mathcal{T}$  上相对顶点的连线剪开, 将三角形  $\mathcal{T}$  分成两个三角形。
- 单于丢弃其中一个三角形, 留下的三角形作为新的  $\mathcal{T}$ 。

对哪些实数值  $\theta$ , 木兰可以确保在有限步后获胜, 不论单于如何进行游戏?

**第 5 题.** 设  $\mathbb{R}_{>0}$  是由全体正实数构成的集合。求所有函数  $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ , 满足对任意  $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ , 均有

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)}.$$

**第 6 题.** 设无穷序列  $a_1, a_2, a_3, \dots$  的每一项均是大于 1 的正整数。已知对每个正整数  $n$ ,  $a_{n+1}$  是大于  $a_n$  的所有正整数中, 满足  $\gcd(a_{n+1}, a_i) > 1$  对每个  $i = 1, 2, \dots, n$  均成立的最小正整数。

证明: 存在正整数  $T$  和  $L$ , 使得对任意正整数  $n$ , 均有

$$a_{n+T} = a_n + L.$$

(注:  $\gcd(x, y)$  表示正整数  $x$  和  $y$  的最大公约数。)