



сряда, 15. юли 2026

Задача 1. На дъска са записани 2026 естествени числа по-големи от 1, не непременно две по две различни. На всеки ход Конфуций избира две числа $m > 1$ и $n > 1$ от различни места на дъската и ги заменя с числата

$$\text{НОД}(m, n) \quad \text{и} \quad \frac{\text{НОК}(m, n)}{\text{НОД}(m, n)}.$$

Той продължава да прави ходове докато е възможно.

(а) Да се докаже, че след краен брой ходове точно едно число M от написаните на дъската е по-голямо от 1.

(б) Да се докаже, че числото M не зависи от ходовете на Конфуций.

(Означили сме с $\text{НОД}(x, y)$ най-големия общ делител на естествените числа x и y , а с $\text{НОК}(x, y)$ – най-малкото общо кратно на x и y .)

Задача 2. Даден е триъгълник ABC , в който с M и N са означени средите съответно на страните AB и AC . Точките K и L са вътрешни съответно за триъгълниците BMC и BNC и са такива, че K е вътрешна за триъгълник ABL , а L е вътрешна за триъгълник AKC . Известно е, че

$$\angle KBA = \angle ACL, \quad \angle LBK = \angle LNC \quad \text{и} \quad \angle LCK = \angle BMK.$$

Нека O е центърът на описаната окръжност за триъгълник AKL . Да се докаже, че $OM = ON$.

Задача 3. Нека n е естествено число. Ли и Хан разполагат с пръчка с дължина 1 и искат да я разделят помежду си. Ли отбелязва не повече от n точки върху пръчката, а след това Хан отбелязва също не повече от n точки върху пръчката. Всички отбелязани точки са различни. Пръчката се разрязва на парчета по отбелязаните точки. След това, започвайки от Ли и редувайки се, всеки взима по едно парче от все още невзетите парчета, докато свършат. Всеки от играчите се стреми общата дължина от събраните от него парчета да е възможно най-голяма.

За всяко n , да се определи най-голямата възможна стойност s , такава че Ли може да си гарантира общата дължина от парчетата му да е поне s , независимо от играта на Хан.



четвъртък, 16. юли 2026

Задача 4. Шан и Мулан играят следната игра. Даден е ъгъл θ , $0^\circ < \theta < 180^\circ$, който е предварително известен на двамата. Първоначално Шан изрязва от хартия триъгълник $\mathcal{T}$ по негов избор. След което, редувайки се, те повтарят следните стъпки:

- Ако поне един от ъглите на $\mathcal{T}$ е равен на θ , то Мулан печели.
- В противен случай, Мулан избира страна на $\mathcal{T}$ и вътрешна точка P от нея. Тя разрязва $\mathcal{T}$ по отсечката, свързваща точката P и срещуположния връх на $\mathcal{T}$, разделяйки $\mathcal{T}$ на два триъгълника.
- Шан премахва един от двата триъгълника по негов избор, а оставащия триъгълник означава отново с $\mathcal{T}$.

За кои реални стойности на θ , независимо от играта на Шан, Мулан може да си гарантира победата?

Задача 5. Нека $\mathbb{R}_{>0}$ е множеството от положителните реални числа. Да се намерят всички функции $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, такива че

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)}$$

е изпълнено за всеки $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.

Задача 6. Дадена е безкрайна редица от естествени числа $a_1, a_2, a_3, \dots$, всяко от които е по-голямо от 1. Известно е, че за всяко естествено n , числото a_{n+1} е най-малкото естествено число по-голямо от a_n , такова че $\text{НОД}(a_{n+1}, a_i) > 1$ за $i = 1, 2, \dots, n$. Да се докаже, че съществуват естествени числа T и L , такива че

$$a_{n+T} = a_n + L$$

за всяко n .

(Означаваме с $\text{НОД}(x, y)$ най-големия общ делител на естествените числа x и y .)