



srijeda, 15. juli 2026

Zadatak 1 Na tabli je napisano 2026 ne nužno različitih cijelih brojeva većih od 1. U jednom potezu Konfučije bira dva broja $m > 1$ i $n > 1$ napisana na različitim pozicijama na tabli i zamjenjuje ova dva broja sa

$$\text{nzd}(m, n) \quad \text{i} \quad \frac{\text{nzs}(m, n)}{\text{nzd}(m, n)}.$$

On nastavlja izvršavati ove poteze dok god je to moguće.

(a) Dokazati da, bez obzira na izbore koje Konfučije pravi, nakon konačno mnogo poteza tačno jedan broj M na tabli je veći od 1.

(b) Dokazati da vrijednost broja M ne ovisi od izbora koje Konfučije pravi.

(Napomena: $\text{nzd}(x, y)$ označava najveći zajednički djelilac pozitivnih cijelih brojeva x i y , a $\text{nzs}(x, y)$ označava najmanji zajednički sadržilac pozitivnih cijelih brojeva x i y .)

Zadatak 2 Neka je ABC trougao i neka su tačke M i N središta stranica AB i AC , redom. Neka su tačke K i L odabrane strogo unutar trouglova BMC i BNC , redom, tako da K leži strogo unutar trougla ABL i L leži strogo unutar trougla AKC . Pretpostavimo da vrijedi

$$\angle KBA = \angle ACL, \quad \angle LBK = \angle LNC, \quad \text{i} \quad \angle LCK = \angle BMK.$$

Neka je O centar opisane kružnice trougla AKL . Dokazati $OM = ON$.

Zadatak 3 Neka je n pozitivan cijeli broj. Liu Bang i Xiang Yu imaju štap dužine 1 i žele da ga podijele između sebe. Liu označava najviše n tačaka na štapu, a zatim Xiang također označava najviše n tačaka na štapu. Sve označene tačke su različite. Zatim oni presijeku štap na svim označenim tačkama čime dobijaju određen broj komada. Nakon toga naizmjenično povlače poteze, pri čemu potez podrazumijeva uzimanje jednog komada koji nije ranije uzet. Liu igra prvi. Svaki od igrača želi maksimizirati ukupnu dužinu komada koje je uzeo.

Za svako n odrediti najveći realan broj c tako da Liu može sa sigurnošću postići ukupnu dužinu od barem c , bez obzira kako Xiang igra.



četvrtak, 16. juli 2026

Zadatak 4 Shan-Yu i Mulan igraju igru. Neka je θ ugao za koji vrijedi $0^\circ < \theta < 180^\circ$ i čiju vrijednost znaju oba igrača. Na početku Shan-Yu pravi papirni trougao $\mathcal{T}$ dimenzija koje on želi. Zatim igrači ponavljaju sljedeće korake:

- Ako $\mathcal{T}$ ima barem jedan ugao čija je mjera tačno θ , igra završava i Mulan pobjeđuje.
- U suprotnom, Mulan bira tačku P na jednoj od stranica trougla $\mathcal{T}$, različitu od njegovih tjemena. Ona zatim siječe trougao $\mathcal{T}$ po duži koja spaja P sa naspramnim tjemnom od $\mathcal{T}$, čime dijeli $\mathcal{T}$ na dva trougla.
- Shan-Yu odbacuje jedan od dva novonastala trougla. Preostali trougao postaje novi $\mathcal{T}$.

Za koje realne vrijednosti θ Mulan može garantovati pobjedu u konačno mnogo koraka, bez obzira na to kako Shan-Yu igra?

Zadatak 5 Sa $\mathbb{R}_{>0}$ označimo skup pozitivnih realnih brojeva. Odrediti sve funkcije $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ takve da

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)}$$

vrijedi za sve $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.

Zadatak 6 Neka je $a_1, a_2, a_3, \dots$ beskonačan niz pozitivnih cijelih brojeva većih od 1. Pretstavimo da za sve pozitivne cijele brojeve n vrijedi da je a_{n+1} najmanji pozitivan cijeli broj veći od a_n sa osobinom da za sve $i = 1, 2, \dots, n$ vrijedi $\text{nzd}(a_{n+1}, a_i) > 1$. Dokazati da postoje pozitivni cijeli brojevi T i L takvi da

$$a_{n+T} = a_n + L$$

vrijedi za sve pozitivne cijele brojeve n .

(Napomena: $\text{nzd}(x, y)$ označava najveći zajednički djelilac pozitivnih cijelih brojeva x i y .)