



Չորեքշաբթի, 15. հուլիսի 2026

Խնդիր 1. Գրատախտակին գրված են 2026 հատ 1-ից մեծ բնական թվեր (թվերը կարող են իրար հավասար լինել): Յուրաքանչյուր քայլի Արփին ընտրում է գրատախտակին գրված թվերից երկուսը՝ $m > 1$ և $n > 1$, և այդ երկու թվերը փոխարինում է

$$\gcd(m, n) \quad \text{և} \quad \frac{\text{lcm}(m, n)}{\gcd(m, n)}$$

թվերով: Նա շարունակում է քայլ կատարել այնքան ժամանակ քանի դեռ հնարավոր է:

(Ա) Ապացուցե՛ք, որ անկախ Արփիի ընտրություններից վերջավոր քայլերից հետո գրատախտակին գրված թվերից ճիշտ մեկ հատը՝ M -ը, մեծ է 1-ից:

(Բ) Ապացուցե՛ք, որ M -ի արժեքը անկախ է Արփիի ընտրություններից:

(Դիտարկում: $\gcd(x, y)$ -ը x և y թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարն է, իսկ $\text{lcm}(x, y)$ -ը x և y թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկն է:)

Խնդիր 2. Տրված է ABC եռանկյունը, իսկ M և N կետերը համապատասխանաբար AB և AC կողմերի միջնակետերն են: Դիցուք K և L կետերը ընկած են համապատասխանաբար BMC և BNC եռանկյունների ներսում (կետերը չեն կարող գտնվել կողմերի վրա) այնպես, որ K կետը ընկած է ABL եռանկյան ներսում իսկ L կետը ընկած է AKC եռանկյան ներսում (կետերը չեն կարող գտնվել կողմերի վրա): Հայտնի է, որ

$$\angle KBA = \angle ACL, \quad \angle LBK = \angle LNC, \quad \text{և} \quad \angle LCK = \angle BMK$$

Դիցուք O կետը AKL եռանկյան արտագծած շրջանագծի կենտրոնն է: Ապացուցե՛ք, որ $OM = ON$:

Խնդիր 3. Դիցուք n -ը բնական թիվ է: Լեոն և Մերին ունեն 1 երկարությամբ ձող և ուզում են իրենց մեջ բաժանել: Լեոն ձողի վրա նշում է ամենաշատը n կետ և հետո Մերին է ձողի վրա նշում ամենաշատը n կետ: Հայտնի է, որ նշված կետերը իրարից տարբեր են: Նրանք ձողը կտրում են բոլոր նշված կետերում և ստանում ինչ-որ քանակի կտորներ: Կտրելուց հետո Լեոն և Մերին հերթականությամբ վերցնում են մնացած կտորները, որտեղ առաջինը սկսում է Լեոն: Յուրաքանչյուր խաղացողի նպատակն է ունենալ հնարավոր առավելագույն իր ունեցած ձողերի երկարությունների գումար: Յուրաքանչյուր n -ի համար գտնել հնարավոր ամենամեծ c թիվը, որը բավարարում է հետևյալ պայմանին. Լեոն կարող է երաշխավորել, որ իր ունեցած ձողերի երկարությունների գումարը գոնե c է, անկախ Մերիի մարտավարությունից:

Language: Armenian

Աշխատաժամանակը՝ 4 ժամ 30 րոպե:

Յուրաքանչյուր խնդիր գնահատվում է առավելագույնը 7 միավոր:



Հինգշաբթի, 16. հուլիսի 2026

Խնդիր 4. Ադին և Բուդին խաղում են հետևյալ խաղը: Տրված է θ անկյունը, որտեղ $0^\circ < \theta < 180^\circ$ և այն հայտնի է երկու խաղացողներին: Ադին թղթից պատրաստում է ինչ-որ եռանկյուն $\mathcal{T}$ իր նախընտրությամբ: Հետո նրանք հերթականությամբ կատարում են հետևյալ քայլերը.

- եթե $\mathcal{T}$ եռանկյան անկյուններից գոնե մեկը հավասար θ , ապա Բուդին հաղթում է:
- Հակառակ դեպքում Բուդին $\mathcal{T}$ եռանկյան պարագծի վրա ընտրում է ինչ-որ P կետ, որը տարբեր է գագաթներից: Հետո նա P -ից իր հակառակ գագաթը միացնող հատվածով կտրում է $\mathcal{T}$ եռանկյունը՝ բաժանաելով այն երկու եռանկյունների:
- Ադին շարունակում է ստացված եռանկյուններից մեկը, իսկ մյուս եռանկյունը դառնում է նոր $\mathcal{T}$ -ն:

Գտնել θ -ի բոլոր իրական արժեքները, որոնց համար Բուդին կարող է երաշխավորել իր հաղթանակը վերջավոր քայլերից հետո անկախ Ադիի մարտավարությունից:

Խնդիր 5. Դիցուք $\mathbb{R}_{>0}$ դրական իրական թվերի բազմությունն է: Գտնել բոլոր $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ ֆունկցիաները այնպես, որ

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)}$$

ցանկացած $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$:

Խնդիր 6. Դիցուք $a_1, a_2, a_3, \dots$ անվերջ հաջորդականությունը կազմված է 1-ից մեծ բնական թվերից: Հայտնի է, որ ցանկացած n բնական թվի համար a_{n+1} -ը ամենափոքր բնական թիվն է, որը մեծ է a_n -ից և $\gcd(a_{n+1}, a_i) > 1$ ցանկացած $i = 1, 2, \dots, n$ համար: Ապացուցե՛ք, որ գոյություն ունեն T և L բնական թվեր այնպես, որ

$$a_{n+T} = a_n + L$$

ցանկացած n բնական թվի համար: (Դիտարկում: $\gcd(x, y)$ -ը x և y թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարն է:)