الأربعاء, 15. تموز 2026

مسألة 1. يوجد 2026 عددا صحيحاً أكبر من 1 على السبورة، ليست بالضرورة مختلفة. بحركة، يقوم كونفوشيوس باختيار عددين طبيعيين $m > 1, n > 1$ مكتوبين في مكانين مختلفين على السبورة، ويستبدلهما بالعددين:

$$\gcd(m,n), \frac{\operatorname{lcm}(m,n)}{\gcd(m,n)}$$

يستمر كونفوشيوس بالقيام بهذه العملية مادام ذلك ممكناً.

1) أثبت أنه مهما كانت اختيارات كونفوشيوس، بعد عدد منتهٍ من الحركات، سيتبقى على السبورة عدد صحيح وحيد M وأكبر من واحد.

2) أثبت أن العدد الصحيح M لا يعتمد على اختيارات كونفوشيوس.

(لاحظ أن $\gcd(x,y)$ يرمز إلى القاسم المشترك الأكبر للعددين x, y و $\operatorname{lcm}(x,y)$ يرمز إلى مضاعفهما المشترك الأصغر).

مسألة 2. ليكن ABC مثلثا و لتكن النقطتان M و N منتصفي الضلعين AB و AC على الترتيب. لتكن K و L نقطتين داخل المثلثين BMC و BNC على الترتيب بحيث K تقع داخل المثلث ABL و L تقع داخل المثلث AKC.

نفرض أن

$$\angle KBA = \angle ACL, \qquad \angle LBK = \angle LNC, \qquad \text{and} \qquad \angle LCK = \angle BMK.$$

ليكن O مركز الدائرة المحيطة بالمثلث AKL . برهن أن $OM = ON$.

مسألة 3. ليكن n عدداً صحيحاً موجباً. لدى ليو بانج و شيانج يو عصا طولها 1 ويريدان تقسيمها بينهما. يُعَلّم ليو على الأكثر n نقطة على العصا، و بعد ذلك تُعلّم شيانج على الأكثر n نقطة على العصا. النقاط المُعَلّمة مختلفة. ثم تُقَطّع العصا في كل النقاط المُعَلّمة، وينتج من ذلك عدد من القِطَع. بعد ذلك، يقوم كل منهما في دوره بأخذ قطعة من العصا لم يتم أخذها بعد، والبداية تكونِ لـ ليو أولاً. هدف كل لاعب هو جعل مجموع أطوال قطعه أكبر ما يمكن. لكل n، أوجد أكبر قيمة c بحيث يمكنِ لـ ليو ضمان الحصول على قطع طولها الإجمالي على الأقل c، بغض النظر عن طريقة لعب شيانج.

الخميس, 16. تموز 2026

مسألة 4. شان يو و مولان يلعبان لعبة. ليكن θ زاوية و $0^\circ < \theta < 180^\circ$ ومعلومة لكلا اللاعبين. بدايةً، شان يو يعمل المثلث $\mathcal{T}$ من الورق بقياسات من اختياره. ثم، ينفذان الخطوات التالية بشكل متكرر:

أولاً: إذا كانت في المثلث $\mathcal{T}$ زاوية واحدة على الأقل قياسها بالضبط θ، فإن اللعبة تتوقف وتفوز مولان.

ثانياً: ما عدا ذلك، تختار مولان نقطة P على محيط $\mathcal{T}$ مختلفة عن رؤوسه الثلاثة. ومن ثم تعمل قطعة مستقيمة من النقطة P إلى الرأس المقابل، تقسمه إلى مثلثين.

ثالثاً: شان يو تتخلص من أحد هذين المثلثين. المثلث المتبقي يصبح المثلث $\mathcal{T}$ الجديد.

لأي قيم حقيقية لِـ θ يمكن لِـ مولان ضمان فوزها في عدد منتهٍ من الخطوات، بغض النظر عن كيفية لعب شان يو؟

مسألة 5. لتكن $\mathbb{R}_{>0}$ مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة. حدد جميع الاقترانات $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ بحيث أن

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)}$$

لكل $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$

مسألة 6. لتكن $a_1, a_2, a_3, \ldots$ متتالية غير منتهية من أعداد صحيحة موجبة أكبر من 1. افرض أنه لأي عدد صحيح موجب n، العدد a_{n+1} هو أصغر عدد صحيح موجب أكبر من a_n بحيث أن $\gcd(a_{n+1}, a_i) > 1$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$. برهن أنه يوجد أعداد صحيحة موجبة T و L بحيث أن

$$a_{n+T} = a_n + L$$

لكل عدد صحيح موجب n.

لاحظ أن $\gcd(x, y)$ يرمز إلى القاسم المشترك الأكبر للعددين x, y