الأربعاء 15 جويلية 2026

مسألة 1. يوجد 2026 عددا طبيعيا أكبر تماما من 1 على السبورة، ليست بالضرورة مختلفة. في عملية واحدة تقوم آلاء باختيار عددين طبيعيين $m > 1, n > 1$ مكتوبين على السبورة في مكانين مختلفين، تمسحهما، وتستبدلهما بالعددين:

$$\gcd(m,n), \frac{\operatorname{lcm}(m,n)}{\gcd(m,n)}$$

تستمر آلاء بالقيام بهذه العملية كلما كان ذلك ممكنا.

أ. أثبت أنه مهما كانت اختيارات آلاء، بعد عدد منته من العمليات، سيبقى بالضبط عدد واحد M على السبورة أكبر تماما من واحد.

ب. برهن أنه مهما كانت اختيارات آلاء فستحصل دوما على نفس العدد M.

(يرمز $\gcd(x,y)$ إلى القاسم المشترك الأكبر للعددين x, y و يرمز $\operatorname{lcm}(x,y)$ إلى مضاعفهما المشترك الأصغر)

مسألة 2. ليكن ABC مثلثا و لتكن النقطتان M و N منتصفي الضلعين AB و AC على الترتيب. لتكن K و L نقطتين داخل المثلثين BMC و BNC على الترتيب بحيث K تقع داخل المثلث ABL و L تقع داخل المثلث AKC. نفرض أن

$$\angle KBA = \angle ACL, \qquad \angle LBK = \angle LNC, \qquad \angle LCK = \angle BMK.$$

ليكن O مركز الدائرة المحيطة بالمثلث AKL. برهن أن $OM = ON$.

مسألة 3. ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم. لدى يحي و رنيم عصا طولها 1 و يريدان تقسيمها بينهما. يعلّم يحي على الأكثر n نقطة على العصا، و بعد ذلك تعلّم رنيم على لأكثر n نقطة على العصا. النقاط المعلّمة مختلفة. بعد ذلك تقطّع العصا في كل النقاط المعلّمة، و بذلك يصبح لديهما عدد من القطع. بعد ذلك، يقوم كل منهما في دوره بأخذ قطعة من العصا لم يتم أخذها بعد، يبدأ يحي أولا. هدف كل لاعب هو جعل مجموع أطوال قطعه أكبر ما يمكن.

من أجل كل n، أوجد أكبر قيمة c بحيث يمكن ليحي ضمان الحصول على قطع طولها الإجمالي على الأقل c، بغض النظر عن طريقة لعب رنيم.

الخميس 16 جويلية 2026

مسألة 4. يلعب شانيو و مولان لعبة. لتكن θ زاوية حيث $0^\circ < \theta < 180^\circ$ معلومة لكلا اللاعبين. بداية، شانيو يصنع مثلثا ورقيا $\mathcal{T}$ بأطوال من اختياره، ثم يقومان بشكل متتابع بالخطوات التالية:

- إذا كان في $\mathcal{T}$ على الأقل زاوية قيسها θ تنتهي اللّعبة و تفوز مولان.
- و إلّا، تختار مولان نقطة P على محيط المثلث $\mathcal{T}$ تختلف عن رؤوسه الثلاثة. ثم تقوم بقصّة مستقيمة من P إلى الرأس المقابل لها في $\mathcal{T}$، فتقسّمه بذلك إلى مثلثين.
- يتخلص شانيو من أحد المثلثين. المثلث الباقي يصبح المثلث $\mathcal{T}$ الجديد.

ما هي القيم الحقيقية لـ θ التي من أجلها يمكن لمولان ضمان فوزها في عدد منته من الخطوات، بغضّ النظر عن طريقة لعب شانيو؟

مسألة 5. لتكن $\mathbb{R}_{>0}$ مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة تماما. حدد كل الدوال $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ التي تحقق

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)}$$

من أجل كل $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.

مسألة 6. لتكن $a_1, a_2, a_3, \ldots$ متتالية غير منتهية من الأعداد الطبيعية الأكبر تماما من 1. نفرض أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n, العدد a_{n+1} هو أصغر عدد طبيعي غير معدوم أكبر تماما من a_n بحيث $\gcd(a_{n+1}, a_i) > 1$ من أجل كل $i = 1, 2, \ldots, n$.
أثبت أنه يوجد عددان طبيعيان غير معدومين T و L يحققان أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$a_{n+T} = a_n + L$$

.

($\gcd(x, y)$ يرمز إلى القاسم المشترك الأكبر للعددين x, y)