الأربعاء, 15. يوليو 2026

المسألة رقم 1. لدينا 2026 عدد صحيح أكبر من 1 مكتوبة على السبورة ليست بالضرورة مختلفة. في الحركة الواحدة، يختار كونفيوشس عددين صحيحين $m > 1$ و $n > 1$ من مكانين مختلفين على السبورة ويستبدلهم بالعددين

$$\gcd(m, n), \frac{\operatorname{lcm}(m, n)}{\gcd(m, n)}.$$

ويستمر بالقيام بالحركة طالما يمكنه ذلك.

١. أثبت أنه، بعد عدد منتهٍ من الحركات، سيبقى بالضبط عدد واحد M أكبر من 1، بغض النظر عن طريقة الحركات التي يقوم بها كونفيوشس.

٢. أثبت أن قيمة M لا تعتمد على حركات كونفيوشس.

ملاحظة: نعرف $\gcd(x, y)$ على أنه أكبر قاسم مشترك للعددين الصحيحين الموجبين x و y، ونعرف $\operatorname{lcm}(x, y)$ على أنه أصغر مضاعف مشترك للعددين الصحيحين الموجبين x و y.

المسألة رقم 2. ليكن ABC مثلثًا ولتكن النقطتان M و N منتصفي القطعتين AB و AC تواليًا. لتكن النقطتان K و L تقعان تمامًا داخل المثلثين BMC و BNC تواليًا، وبحيث تقع K داخل المثلث ABL تمامًا، و تقع L داخل المثلث AKC تمامًا، وتحققان أن

$$\angle KBA = \angle ACL, \qquad \angle LBK = \angle LNC, \qquad \angle LCK = \angle BMK.$$

لتكن O مركز الدائرة المحيطة بالمثلث AKL. أثبت أن $OM = ON$.

ملاحظة: يقال أن النقطة تقع تمامًا داخل المثلث إذا وقعت داخله ولم تقع على أي من أضلاعه.

المسألة رقم 3. ليكن n عددًا صحيحًا موجبًا. لدى ليو بانغ وشيانغ يو عصا طولها 1، ويريدان تقسيمها فيما بينهما. يقوم ليو بتحديد n نقطة على العصا على الأكثر. بعد ذلك، يقوم شيانغ بتحديد n نقطة على العصا على الأكثر بحيث تكون النقاط المحددة مختلفة. نقوم بقص العصا عند جميع النقاط المحددة للحصول على عدد من القطع. بعد ذلك، يتناوب ليو وشيانغ الأدوار في اختيار القطع التي لم يتم اختيارها ابتداءً من ليو أولًا. هدف كل لاعب من اللاعبين هو تعظيم مجموع أطوال قطعه التي اختارها.

لكل n، حدد أكبر قيمة c بحيث يضمن ليو مجموع أطوال قطع c على الأقل، بغض النظر عن طريقة لعب شيانغ.

الخميس, 16. يوليو 2026

المسألة رقم 4. يلعب شانيو ومولان لعبة. لتكن $0° < \theta < 180°$ زاوية معلومة لكلا اللاعبين. في البداية، يصنع شانيو مثلث ورقي $\mathcal{T}$ بزوايا من اختياره. بعد ذلك، يقومان بتكرار الحركات التالية:

- اذا كان $\mathcal{T}$ يحتوي على الأقل على زاوية واحدة قياسها θ، فحينها تنتهي اللعبة وتفوز مولان.
- غير ذلك، تقوم مولان باختيار نقطة P على ضلع من أضلاع المثلث $\mathcal{T}$ ولاتساوي أيًا من رؤوسه. ثم تقص المثلث ابتداءً من P إلى الرأس المقابل في $\mathcal{T}$، بحيث تقسم $\mathcal{T}$ إلى مثلثين.
- يستبعد شانيو أحد المثلثين، ويصبح المثلث المتبقي هو $\mathcal{T}$ الجديد.

لأي القيم الحقيقية θ يمكن لمولان ضمان الفوز في عدد منته من الخطوات، بغض النظر عن طريقة لعب شانيو.

المسألة رقم 5. لتكن $\mathbb{R}_{>0}$ هي مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة. أوجد جميع الدوال $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ بحيث:

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)}$$

لكل $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.

المسألة رقم 6. لتكن $a_1, a_2, a_3, \ldots$ متتابعة غير منتهية من الأعداد الصحيحة الموجبة الأكبر من 1. افرض أنه لكل الأعداد الصحيحة الموجبة n، العدد a_{n+1} هو أقل عدد صحيح موجب أكبر من a_n بحيث $\gcd(a_{n+1}, a_i) > 1$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$. أثبت أنه يوجد عددين صحيحين موجبين T و L بحيث

$$a_{n+T} = a_n + L$$

لكل عدد صحيح موجب n.

ملاحظة: نعرف $\gcd(x, y)$ على أنه أكبر قاسم مشترك للعددين الصحيحين الموجبين x و y.