



E mërkurë, 15 korrik 2026

Problem 1. Në një tabelë janë shkruar 2026 numra natyrorë më të mëdhenj se 1, jo domosdoshmërisht të ndryshëm. Në secilën lëvizje, Ana zgjedh dy numra natyrorë $m > 1$ dhe $n > 1$ nga tabela dhe i zëvendëson këta dy numra me

$$\text{pmmp}(m, n) \quad \text{dhe} \quad \frac{\text{shmvp}(m, n)}{\text{pmmp}(m, n)}.$$

Ajo vazhdon të bëjë lëvizje për sa kohë që është e mundur.

(a) Tregoni që, pavarësisht zgjedhjeve të Anës, pas një numri të fundëm lëvizjesh, saktësisht një numër natyror M në tabelë është më i madh se 1.

(b) Tregoni që vlera e numrit M nuk varet nga zgjedhjet e Anës.

(Shënim: $\text{pmmp}(x, y)$ është pjesëtuesi më i madh i përbashkët i numrave natyrorë x dhe y , kurse $\text{shmvp}(x, y)$ është shumëfishi më i vogël i përbashkët i numrave natyrorë x dhe y .)

Problem 2. Le të jetë ABC trekendësh dhe le të jenë pikat M dhe N meset e brinjëve AB dhe AC , përkatësisht. Le të jenë K dhe L pika brenda trekëndëshave BMC dhe BNC , përkatësisht, të tilla që K ndodhet brenda trekëndësisht ABL dhe L ndodhet brenda trekëndëshit AKC . Supozojmë që

$$\angle KBA = \angle ACL, \quad \angle LBK = \angle LNC, \quad \text{dhe} \quad \angle LCK = \angle BMK.$$

Le të jetë O qendra e rrethit të jashtëshkruar të trekëndëshit AKL . Tregoni që $OM = ON$.

Problem 3. Le të jetë n numër natyror. Learti dhe Sara kanë një shklop me gjatësi 1 që dëshirojnë ta ndajnë mes tyre. Learti shenjon më së shumti n pika në shklop dhe Sara pastaj shenjon më së shumti n pika në shklop. Të gjitha pikët e shenjuara janë të ndryshme. Tutje, shkopi ndahet saktësisht në pikat e shenjuara dhe krijohen disa pjesë të shklopit. Më pas, Learti dhe Sara marrin pjesë të shklopit me radhë, duke filluar me Leartin. Asnjëri prej tyre nuk mund t'i marrë pjesët e shklopit që i ka marrë lojtari tjetër në hapat paraprakë. Synimi i secilit lojtar është që shuma e gjatësive të pjesëve që kanë marrë të jetë sa më e madhe.

Për secilin numër natyror n , gjeni vlerën më të madhe të mundshme c të tillë që Learti mund të garantojë që shuma e gjatësive të pjesëve të tij të jetë të paktën c , pavarësisht se si luan Sara.



E enjte, 16 korrik 2026

Problem 4. Joni dhe Merita luajnë si vijon. Le të jetë θ një kënd me $0^\circ < \theta < 180^\circ$, i ditur nga të dy lojtarët. Fillimisht, Joni ndërton një trekëndësh letre $\mathcal{T}$ me përmasa sipas dëshirës së tij. Pastaj, ata bëjnë këto lëvizje në mënyrë të përsëritur:

- Nëse $\mathcal{T}$ ka të paktën një kënd me masë saktësisht θ , atëherë loja përfundon dhe Merita fiton.
- Përndryshe, Merita zgjedh një pikë P në perimetrin e $\mathcal{T}$, të ndryshme nga kulmet e tij. Ajo pastaj pret trekëndëshin përgjatë segmentit nga pika P deri në kulmin e trekëndëshit $\mathcal{T}$ përballë kësaj pike, duke e ndarë atë në dy trekëndësha.
- Joni hedh njërin nga dy trekëndëshat. Trekëndëshi i mbetur bëhet trekëndëshi i ri $\mathcal{T}$.

Për cilat vlera reale të θ është e mundur që Merita të garantojë fitoren e saj pas një numri të fundëm lëvizjesh, pavarësisht se si luan Joni?

Problem 5. Le të jetë $\mathbb{R}_{>0}$ bashkësia e numrave realë pozitivë. Gjeni të gjitha funksionet $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ të tilla që

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)}$$

për të gjithë numrat $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.

Problem 6. Le të jetë $a_1, a_2, a_3, \dots$ varg i pafundëm numrash natyrorë më të mëdhenj se 1. Për çdo numër natyror n , numri a_{n+1} është numri më i vogël natyror më i madh se a_n i tillë që $\text{pmmp}(a_{n+1}, a_i) > 1$ për çdo $i = 1, 2, \dots, n$. Tregoni që ekzistojnë numrat natyrorë T dhe L të tillë që

$$a_{n+T} = a_n + L$$

për çdo numër natyror n .

(Shënim: $\text{pmmp}(x, y)$ është pjesëtuesi më i madh i përbashkët i numrave natyrorë x dhe y .)