



Woensdag, 15 Julie 2026

Probleem 1. Daar word 2026 heelgetalle (nie noodwendig verskillend nie) groter as 1 op 'n boord geskryf. In elke beweging, Confucius kies twee heelgetalle $m > 1$ en $n > 1$, vanaf verskillende plekke op die boord, dan vervang hy daardie twee heelgetalle met

$$\text{ggd}(m, n) \quad \text{en} \quad \frac{\text{kgv}(m, n)}{\text{ggd}(m, n)}.$$

Hy hou aan om bewegings te maak solank as dit moontlik is.

- (a) Bewys dat, onafhanklik van Confucius se keuse, na eindig baie bewegings is daar presies één heelgetal M op die boord wat groter as 1 is.
- (b) Bewys dat die waarde van M nie van Confucius se keuse afhang nie.

(Let op dat $\text{ggd}(x, y)$ die grootse gemene deler van die heelgetalle x en y aandui en dat $\text{kgv}(x, y)$ die kleinste gemene veelvoud van die heelgetalle x en y aandui.)

Probleem 2. Laat ABC 'n driehoek wees en laat punte M en N die middelpunte van AB en AC wees, onderskeidelik. Punte K en L word gekies streng binne driehoeke BMC en BNC , onderskeidelik, sodat K streng binne driehoek ABL lê en L streng binne driehoek AKC lê. Neem aan dat

$$\angle KBA = \angle ACL, \quad \angle LBK = \angle LNC, \quad \text{en} \quad \angle LCK = \angle BMK.$$

Laat O die middelpunt van die omgeskrewe sirkel van die driehoek AKL wees. Bewys dat $OM = ON$.

Probleem 3. Laat n 'n positiewe heelgetal wees. Liu Bang en Xiang Yu het 'n stokkie van lengte 1. Hulle wil dit tussen hulle mekaar verdeel. Oom Liu teken hoogstens n punte aan die stokkie, en dan teken Oom Xiang hoogstens n punte aan die stokkie. Die getekende punte verskil van mekaar. Dan word die stokkie gesny by al die getekende punte; daardeur kry hulle 'n paar stukke. Daarna, maak hulle beurte om 'n stuk te vat, en Oom Liu begin. Elke speler wil die totale lengte van hul stukke maksimeer.

Vir elke n , bepaal die grootste waarde c sodat Oom Liu kan verseker dat hy 'n totale lengte van ten minste c kan kry, onafhanklik van hoe Oom Xiang speel.



Donderdag, 16 Julie 2026

Probleem 4. Shan-Yu en Mulan speel 'n speletjie. Laat θ 'n hoek wees, sodat $0^\circ < \theta < 180^\circ$. Mulan en Shan-Yu weet die waarde van θ . In die begin, maak Shan-Yu 'n papier driehoek $\mathcal{T}$; hy kan die mate van die driehoek kies. Dan maak hulle herhaaldelik die volgende beurt:

- As $\mathcal{T}$ ten minste een hoek he dat presies θ is, dan stop die spel en wen Mulan.
- Anders, kies Mulan 'n punt P op die omtrek van $\mathcal{T}$, wat verskil van die drie hoekpunte van $\mathcal{T}$. Dan sny sy die driehoek op die lyn tussen P en die teenoorgestelde hoekpunt van $\mathcal{T}$, wat lei tot twee driehoeke.
- Shan-Yu gooi uit een van die twee driehoeke. Die ander driehoek word die nuwe $\mathcal{T}$.

Vir watter reële waardes van θ kan Mulan haar oorwinning seker maak, onafhanklik van hoe speel Shan-Yu?

Probleem 5. Laat $\mathbb{R}_{>0}$ die versameling van positiewe reelgetalle aandui. Bepaal al funksies $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ sodat

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)}$$

vir alle $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.

Probleem 6. Laat $a_1, a_2, a_3, \dots$ 'n oneindege ry positiewe heelgetalle wees, sodat $a_n > 1$ vir alle heelgetalle n . Neem aan dat vir alle positiewe heelgetalle n , die nommer a_{n+1} die kleinste positiewe heelgetal dat groter as a_n is sodat $\text{ggd}(a_{n+1}, a_i) > 1$ vir $i = 1, 2, \dots, n$. Bewys dat daar positiewe heelgetalle T en L bestaan sodat,

$$a_{n+T} = a_n + L$$

vir alle positiewe heelgetalle n .

(Let op dat $\text{ggd}(x, y)$ die grootse gemene deler van die heelgetalle x en y aandui.)