International Mathematical Olympiad Amsterdam 2011

Language: Arabic (Kuwaiti)

Day: 1

الأثنين 18 يوليو 2011 م

السؤال الأول : لأي مجموعه A = { a_1 ، a_2 ، a_3 ، a_4 } تحتوي على أربع أعداد صحيحة موجبه و مختلفة و مجموعها $S_A = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

نفرض أن N_A يمثل عدد الأزواج المرتبة $(i ، j)$ بحيث $4 \geq j > i \geq 1$

و $a_i + a_j$ تقسم S_A .

من بين كل المجموعات A حدد المجموعات التي يكون عندها N_A أكبر ما يمكن .

* * * * *

السؤال الثاني: لتكن S مجموعه منتهية من نقط المستوى تحوي نقطتين على الأقل ، و بفرض أنه لا يوجد في S ثلاث نقاط على إستقامة واحدة . نعني بالطاحونة الهوائية العملية التالية : تبدأ العملية بمستقيم l يمر بالنقطة P ∋ S ، نعتبر النقطة P مركزا للدوران وندور المستقيم l حول P بإتجاه عقارب الساعة حتى يلاقي للمرة الأولى النقطة Q في S ، نتخذ من Q مركزا جديدا للدوران وندور المستقيم l بإتجاه عقارب الساعة حول Q وهكذا تستمر العملية مع جميع نقاط S .

بين أنه يمكن إختيار نقطة P في S ومستقيم l يمر في P تجعل الطاحونة الناتجة تستخدم كل نقطة من نقاط S كمركز للدوران مرات غير منتهية .

* * * * *

السؤال الثالث : لتكن f دالة بحيث $f(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية) و تحقق الدالة f ما يلي :

$$f(x+y) \leq y f(x) + f(f(x))$$

لأي عددين حقيقيين x و y

أثبت أن : $f(x) = 0$ لكل $0 \geq x$

الزمن : أربع ساعات و 30 دقيقة
لكل سؤال 7 درجات

language : Arabic

International Mathematical Olympiad Amsterdam 2011

Language: Arabic (Kuwaiti)

Day: 2

الثلاثاء 19 يوليو 2011 م

السؤال الرابع : ليكن $n > 0$ عدد صحيح . لدينا ميزان ذو كفتين و عدد n من الأثقال أوزانها $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$. و سنضع كل ثقلا من هذه الـ n ثقلا بالميزان واحدا تلو الآخر بحيث لا يزيد وزن الكفة اليمنى عن وزن الكفة اليسرى . في كل خطوة نختار أحد الأثقال التي لم يتم وضعها في الميزان و نضعه إما بالكفة اليمنى أو بالكفة اليسرى حتى يتم الإنتهاء من جميع الأثقال .

حدد عدد الطرق التي يمكن من خلالها تنفيذ ذلك .

* * * *

السؤال الخامس : لتكن f دالة من مجموعة الأعداد الصحيحة إلى مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبه ، لأي عددين صحيحين m و n يكون الفرق $f(m) - f(n)$ يقبل القسمة على $f(m-n)$.

أثبت أنه لجميع الأعداد الصحيحة m و n بحيث $f(n) \geq f(m)$ يكون العدد $f(n)$ يقبل القسمة على $f(m)$

* * * *

السؤال السادس : ليكن ABC مثلث حاد الزوايا ، و لتكن Γ هي الدائرة المارة برؤوس المثلث ، ليكن l مستقيما مماسا للدائرة Γ و ليكن l_a ، l_b ، l_c هي المستقيمات الناتجة من إنعكاس المستقيم l في المستقيمات BC ، AC ، AB على الترتيب .

بين أن الدائرة المارة برؤوس المثلث المتعين بالمستقيمات l_a ، l_b ، l_c تمس الدائرة Γ .