2013 년 7 월 23 일, 화요일

Problem 1. 임의의 두 양의 정수 k, n 에 대하여, 다음의 성질을 만족하는 (서로 다를 필요는 없는) k 개의 양의 정수 $m_1, m_2, \ldots, m_k$ 가 존재함을 증명하여라:

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

Problem 2. 평면 위에 배치된 4027 개의 점을 생각하자. 그 중 어떤 세 점도 한 직선 위에 있지 않고, 전체가 2013 개의 빨간점과 2014 개의 파란점으로 이루어진 경우, 이러한 배치를 '콜럼비아식 배치'라고 하자. 평면 위에 직선들을 그어서 전체 평면을 여러 개의 영역으로 분할할 수 있다. 주어진 콜럼비아식 배치에 대하여 다음의 두 조건을 만족하는 직선들의 배열을 '좋은 배열'이라고 하자:

- 각 직선은 배치된 어떤 점도 지나지 않는다.
- 각 영역은 빨간점과 파란점을 함께 포함할 수 없다.

다음을 만족하는 k 의 최솟값을 구하여라: 어떠한 (4027 개의 점으로 이루어진) 콜럼비아식 배치에 대하여도 k 개의 직선으로 이루어진 좋은 배열이 존재한다.

Problem 3. 삼각형 ABC 에서 꼭지점 A 의 맞은편에 놓인 방접원이 변 BC 에 접하는 점을 A_1 이라 하자. 이와 비슷하게 꼭지점 B 와 C 의 맞은편에 놓인 방접원들을 이용하여, 변 CA 위의 점 B_1 과 변 AB 위의 점 C_1 을 정의하자. 삼각형 $A_1B_1C_1$ 의 외심이 삼각형 ABC 의 외접원 위에 놓여 있다고 가정하자. 이때, 삼각형 ABC 가 직각삼각형임을 증명하여라.
(여기서 꼭지점 A 의 맞은편에 놓인 방접원이란 변 BC, 반직선 AB 의 B 를 지난 부분, 반직선 AC 의 C 를 지난 부분에 동시에 접하는 원을 뜻한다. 꼭지점 B, C 의 맞은편에 놓인 방접원들도 비슷하게 정의한다.)

제한시간: 4 시간 30 분
문항당 7 점

2013 년 7 월 24 일, 수요일

Problem 4. 예각삼각형 ABC 에 대하여, 점 H 를 수심, 점 W 를 변 BC 위의 한 점이라 하자. (단, $W \neq B, C$) 두 점 M, N 을 각각 꼭지점 B, C 에서 마주 보는 변에 내린 수선의 발이라고 하자. 삼각형 BWN 의 외접원을 ω_1 이라 하고, ω_1 위의 점 X 를 선분 WX 가 ω_1 의 지름이 되도록 하는 점이라 하자. 이와 비슷하게 삼각형 CWM 의 외접원을 ω_2 라 하고, ω_2 위의 점 Y 를 선분 WY 가 ω_2 의 지름이 되도록 하는 점이라 하자. 이때, 세 점 X, Y, H 가 한 직선 위에 있음을 증명하여라.

Problem 5. 모든 양의 유리수의 집합을 $\mathbb{Q}_{>0}$ 라 하자. 어떤 함수 $f : \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ 가 다음의 세 조건을 모두 만족한다고 하자:

(i) 모든 $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ 에 대하여, $f(x)f(y) \geq f(xy)$ 이다.

(ii) 모든 $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ 에 대하여, $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ 이다.

(iii) $f(a) = a$ 를 만족하는 1 보다 큰 유리수 a 가 존재한다.

이때, 모든 $x \in \mathbb{Q}_{>0}$ 에 대하여 $f(x) = x$ 임을 증명하여라.

Problem 6. 정수 $n (\geq 3)$ 에 대하여, 원주 위에 등간격으로 놓여 있는 $n+1$ 개의 점을 생각하자. 이 점들에 정수 $0, 1, \ldots, n$ 을 하나씩 배열한다. 한 배열을 회전시켜서 얻어지는 배열들은 모두 같은 배열로 간주한다. 어떤 배열이 다음 조건을 만족할 때, 그 배열을 '아름다운 원순열'이라 부르자:

(조건) $0 \leq a < b < c < d \leq n$ 이고 $a + d = b + c$ 인 임의의 네 정수 a, b, c, d 에 대하여, a 와 d 를 잇는 현과 b 와 c 를 잇는 현이 만나지 않는다.

아름다운 원순열의 개수를 M 이라 하고, $x + y \leq n$ 과 $\gcd(x, y) = 1$ 을 모두 만족하는 양의 정수의 순서쌍 (x, y) 의 개수를 N 이라 할 때, 다음을 증명하여라:

$$M = N + 1.$$

제한시간: 4 시간 30 분

문항당 7 점